$$\frac{AB \times \beta\gamma}{\alpha\beta \times \beta\gamma}$$

$$\frac{A}{\alpha\beta \times \beta}$$

$$\frac{A\Delta \times \beta\gamma}{\beta\gamma} = \frac{A\Gamma \times \alpha\beta}{\beta\gamma}$$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΤΑ

ΕΓΚΥΚΛΙΑ ΔΙΔΑΣΚΟΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ.

ΥΠΟ

Γ. ΚΟΝΔΗ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ.

Ἐκδίδονται δαπάναις

ΣΥΜΕΩΝ ΑΝΔΡΕΑΔΟΥ.

« Εἴπερ ἀριθμὸν ἐκ τῆς ἀνθρωπίνης
» φύσεως ἐξέλοιμεν, οὐκ ἄν ποτέ τι
» φρόνιμοι γενοίμεθα. »
(Πλάτ. Ἐπινομίς).

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ,

ΤΥΠΟΙΣ ΑΝΤΩΝΙΟΥ ΛΑΜΠΡΙΝΙΔΟΥ.

(Ὁδὸς Περικλέους, ἀριθ. 229).

1866.

Δῶρον τοῦ ἐν Σμύρνῃ Ἀριστοφάνους Κ. Μαρμαΐδ, εἰς τὴν Γενικὴν Βιβλιοθήκην τῆς ἐν Σμύρνῃ Ἀδελφότητος τῶν Μουσῶν
Σμύρνη 24 Ἰουνίου 1890.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄.

Εἰσαγωγή.

§. ά. Πρῶτοι ὁρισμοί.

1. Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ὁμοειδῶν ἀντικειμένων ἢ ἀτόμων λαμβάνομεν ἀμέσως τὴν ἰδέαν τοῦ πλήθους, ὡς ἐκ τῆς τοῦ ἀντικειμένου ἢ τοῦ ἀτόμου λαμβάνομεν τὴν ἰδέαν τοῦ ἑνός. Οὕτω σύστημα δένδρων, κεφάλαιον δραχμῶν, σωρὸς λίθων, συλλογὴ βιβλίων κτλ. εἶναι πλήθη διακεκριμμένων μερῶν. Ἀλλ' ἡ ἰδέα αὕτη, ἀπολύτως θεωρουμένη, εἶναι ἀσαφής· διότι ἐννοοῦμεν ἁπλῶς ὑπάρχοντα μέρη εἰς τὸ πλῆθος, οὐχὶ δὲ ῥητῶς καὶ ἐκ πόσων τοιούτων μερῶν συνίσταται· καθόσον μάλιστα ἀπαιτεῖται, ὅταν πρόκηται νὰ διακριθῇ πλῆθός τι ἀπὸ ἕτερον.

Ἐκ τούτου εἰς τὰ πλήθη ταῦτα ἀπεδόθη κατὰ πρῶτον καὶ τὸ ὄνομα ποσόν, ἢ ποσότης, τὸ ὁποῖον ἔπειτα μετέπεσε καὶ εἰς οἱονδήποτε μέγεθος, ἢ εἰς πᾶν ὅ,τι εἶναι ἐπιδεκτικὸν αὐξήσεως ἢ ἐλαττώσεως, οἷον εἰς γραμμάς, ἐπιφανείας, στερεά, βάρη, χρόνους κτλ. Διαστέλλονται δὲ τὰ δύο ταῦτα εἴδη τοῦ ποσοῦ καὶ ὁσάκις μὲν παρουσιάζεται ὡς πλῆθος, ἢ ὡς συλλογὴ ὁμοίων ἀντικειμένων, λέγεται ποσὸν διακεκριμμένον, ὁσάκις δὲ ὡς ἕν, χωρὶς τινος διακρίσεως τῶν μερῶν αὐτοῦ, λέγεται συνεχές.

2. Ἵνα λάβωμεν ἤδη ὡρισμένην ἰδέαν τοῦ ποσοῦ, εἰς μὲν τὸ διακεκριμμένον ἀρκεῖ νὰ ἀντιπαραβάλωμεν ἓν τῶν ὁμοίων αὐτοῦ μερῶν πρὸς τὸ ὅλον, καὶ ἡ σχέσις αὕτη θέλει δώσει τὸν ἀνήκοντα προσδιορισμόν· εἰς δὲ τὸ συνεχὲς λαμβάνομεν ὡρισμένον τι μέρος κατὰ τὸ δοκοῦν, διὰ τοῦ ὁποίου ἀντιπαραβάλλομεν παρομοίως τὸ ἀπροσδιόριστον μέγεθος. Τὸ ἓν τῶν ὁμοίων μερῶν, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς ὅρον παραθέσεως πρὸς τὸ ὅλον, λέγεται μονάς. Οὕτως εἰς τὰ μνησθέντα παραδείγματα, τὸ δένδρον, ἡ δραχμή, ὁ λίθος, τὸ βιβλίον κτλ. εἶναι μονάδες. Ἐξ ἀναλογίας δὲ λέγεται ἐπίσης μονὰς καὶ οἱονδήποτε γνωστὸν μέγεθος, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μέτρον τοῦ συνεχοῦς ποσοῦ, ὡς ὁ πῆχυς, ἡ ὀργυιά, τὸ ςρέμμα, ἡ μνᾶ, ἡ ὥρα κτλ. καὶ εἰς μὲν τὴν πρώτην περίστασιν ἡ μονὰς λέγεται φυσική, εἰς δὲ τὴν δευτέραν μονὰς κατὰ τὸ δοκοῦν.

3. Ἐπαναλαμβανομένης τῆς μονάδος εἰς τὴν ὅλην ποσότητα, ἢ προστιθεμένης εἰς ἑαυτὴν, παράγονται τὰ ἐξαγόμενα ἓν καὶ ἕν, ἤτοι δύο· δύο καὶ ἕν, ἤτοι τρία, καὶ ὁμοίως τέσσαρα, πέντε κτλ. τὰ ὁποῖα εἶναι ἰδιαίτεραι ἐκφράσεις, ἢ μᾶλλον παραστάσεις ὡρισμένων ποσοτήτων· ταῦτα δὲ λέγονται ἀριθμοί.

Ἰδοὺ διατὶ ὁ Νεύτων εἶπεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὁ λόγος τῆς ποσότητος πρὸς τὴν μονάδα· ἄλλοι ἐθεώρησαν τὸν ἀριθμὸν ὡς συλλογὴν ἴσων μερῶν, ἢ μονάδων. Ἀλλ' εἶναι εὔκολον νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἀμφότεροι οὗτοι οἱ τρόποι, ὑπὸ τοὺς ὁποίους θεωροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς, πηγάζουσιν ἀπὸ τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ ὀλίγον διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων.

4 Κατὰ πρῶτον ἐλάβομεν χρείαν ν' ἀντιπαραβάλωμεν ποσὰ πραγματικὰ, ἢ αὐτὰ τὰ ἀντικείμενα ὅσα πίπτουσιν ὑπὸ τὴν αἴσθησιν, καὶ τῶν ὁποίων ἡ μονὰς εἴτε φυσικὴ εἴτε κατὰ τὸ δοκοῦν, ἦτο ἐπίσης πραγματική. Ἀλλὰ μετὰ ταῦτα θέλοντες νὰ συνδυάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς πρὸς ἀλλήλους καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς συνδυασμοὺς τούτους εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς περιστάσεις, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ φύσις τῆς προκειμένης ποσότητος, ἀφηρέσαμεν τὴν ἰδέαν τοῦ παριστανομένου εἴδους καὶ ἐθεωρήσαμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἀπολύτως. Ἐκ τούτου προέκυψεν ἡ διαφορὰ τῆς συγκεκριμμένης μονάδος ἀπὸ τὴν ἀφῃρημένην, ἢ τὴν μαθηματικὴν, καὶ ὁμοίως τοῦ συγκεκριμμένου ἀριθμοῦ ἀπὸ τὸν ἀφῃρημένον. Οὕτω δεκαπέντε δραχμαὶ, εἴκοσι μῆλα, κτλ. εἶναι ἀριθμοὶ συγκεκριμμένοι. Ἁπλῶς δὲ οἱ ἀριθμοὶ ὀκτὼ, δέκα, τριάκοντα κτλ. εἶναι ἀφῃρημένοι καὶ δύνανται νὰ ἐφαρμοσθῶσιν εἰς οἱονδήποτε μέγεθος.

5. Ὁ ἀριθμὸς πρὸς τούτοις λέγεται ἀκέραιος ἢ κλασματικός· καὶ ἀκέραιος μὲν ἢ ὁλοσχερὴς λέγεται, ὅταν ἦναι ἄθροισμα πολλῶν μονάδων ἢ πολλῶν ποσοτήτων, αἱ ὁποῖαι ἀντιπαρεβλήθησαν ἀκριβῶς διὰ τῆς ἀρχικῆς μονάδος.

Κλασματικὸς δὲ, ὅταν ἡ καταμετροῦσα αὐτὸν μονὰς ἦναι κλάσμα, τουτέστι μέρος τι ὡρισμένον τῆς ἀρχικῆς μονάδος· ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς, οὕτω θεωρούμενος, δύναται νὰ ἦναι μικρότερος ἢ μεγαλήτερος τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἢ καὶ ἴσος μὲ αὐτὴν, καθ' ὅσον εἰς ἀπαρτισμὸν αὐτοῦ ἀπαιτοῦνται ὀλιγώτερα ἢ περισσότερα ἐκ τῶν μερῶν ἢ ὅλα τὰ μέρη αὐτῆς.

§. 6'. Περὶ Ἀριθμήσεως.

6. Ὁ φυσικώτερος τρόπος τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν ὡς παρετηρήσαμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 3, συνίσταται εἰς τὴν ἐπανάληψιν τῆς μονάδος εἰς ἑαυτὴν καὶ πάλιν τῆς ἰδίας εἰς τὴν συλλογὴν τῶν πρώτων καὶ καθεξῆς. Οὕτω δὲ συντίθενται διάφοροι συλλογαὶ μονάδων, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ

παρασταθῶσι δι᾽ ἰδιαιτέρων ὀνομάτων. Ὅθεν τὸ σύνολον τῶν ὀνομάτων τούτων, ἐκφερόμενον διαδοχικῶς καὶ κατὰ τάξιν, ἀποτελεῖ τὴν ἀρίθμησιν.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἄπειροι, καὶ ἑπομένως ἀποβαίνει ἀδύνατον νὰ ὀνομασθῇ ἕκαστος μὲ ἰδιαίτερον ὄνομα, ἐγένετο χρεία νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον τοῦ ἐκφράζειν αὐτοὺς δι᾽ ὡρισμένου ἀριθμοῦ λέξεων, ἁρμοδίως συνθετομένων πρὸς ἀλλήλας, καὶ εἰς τοῦτο ἀφορᾷ κυρίως μὲν ἡ ὀνοματολογία τῶν ἀριθμῶν, ταυτοχρόνως δὲ καὶ αὐτὴ ἡ ἀρίθμησις, τῆς ὁποίας ἐρχόμεθα ἤδη νὰ δώσωμεν σύντομον καὶ ἀναλυτικὴν ἔκθεσιν.

7. Ἐπειδὴ πρὸ τῆς ὀνοματολογίας τῶν ἀριθμῶν φυσικῷ τῷ λόγῳ ἀνεπλήρου τὴν χρείαν ἡ ἐπαρίθμησις διὰ τῶν δακτύλων, αὐτῶν τούτων ἐπαναλαμβανομένων καὶ αὖθις καὶ πολλάκις· διὰ τοῦτο ἀπεδόθησαν κατὰ πρῶτον τὰ ἑξῆς ὀνόματα· ἓν (ἢ ἡ μονάς, θεωρουμένη ἐπίσης ὡς ἀριθμός), δύο (ἤτοι ἓν πλέον ἕν), τρία (ἤτοι δύο πλέον ἕν,) τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα, δέκα, τὰ ὁποῖα ὠνομάσθησαν ἀρχικά.

8. Ὁ ἀριθμὸς δέκα, καίτοι συλλογὴ πολλῶν μονάδων, ἐθεωρήθη ἔκτοτε ὡς νέου εἴδους μονάς, καλουμένη δεκάς, ἢ μονὰς τῆς δευτέρας τάξεως πρὸς διάκρισιν τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἥτις λέγεται ἁπλῆ, ἢ τῆς πρώτης τάξεως. Ἀριθμοῦμεν δὲ κατὰ δεκάδας, ὡς ἠριθμήσαμεν καὶ κατὰ μονάδας ἁπλᾶς, λέγοντες, μία δεκὰς, δύο δεκάδες, τρεῖς, τέσσαρες . . . . δέκα δεκάδες. Κοινῶς ὅμως ἀριθμοῦμεν διὰ τῶν ἰδιαιτέρων ὀνομάτων δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, ... ἐννενήκοντα, ἑκατὸν, διὰ τῶν ὁποίων ἐκφέρομεν μὲν τοὺς ἰδίους ἀριθμοὺς, ἀλλὰ σχετικῶς πρὸς τὴν ἁπλῆν μονάδα.

Ἐκ τῶν εἰδικῶν τούτων ὀνομάτων τῶν δεκάδων, ὠφελούμεθα, ὥστε δι᾽ ἁπλῆς συνθέσεως αὐτῶν μετὰ τῶν ἐννέα ἀρχικῶν ὀνομάτων δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν ὅλους τοὺς μεταξὺ τοῦ δέκα καὶ τοῦ εἴκοσι, καὶ ὁμοίως τοὺς μεταξὺ τοῦ εἴκοσι καὶ τοῦ τοῦ τριάκοντα καὶ ἐφεξῆς ἀριθμοὺς, λέγοντες ἕνδεκα, δυωκαίδεκα, δεκατρία, ... εἰκοσιέν, ... τριάκοντα δύο . . . . κτλ. μέχρι τοῦ ἐννενήκοντα ἐννέα.

9. Ὁ ἑπόμενος ἀριθμὸς ἑκατὸν, ὢν ὁμοίως τὸ ἄθροισμα δέκα δεκάδων, θεωρεῖται καὶ αὐτὸς ὡς νέα μονὰς, καλουμένη ἑκατοντὰς ἢ μονὰς τρίτης τάξεως· ἀριθμοῦμεν δὲ καθ᾽ ἑκατοντάδας, ὡς καὶ μονάδας ἁπλᾶς, ἢ δεκάδας, λέγοντες, μία ἑκατοντάς, δύο ἑκατοντάδες . . . . ἐννέα, δέκα ἑκατοντάδες. Κοινῶς ὅμως διὰ τῶν ἰδιαιτέρων ὀνομάτων, ἑκατὸν, διακόσια, τριακόσια . . . . ἐννεακόσια, χίλια· καὶ συνθέτοντες παρομοίως ἕκαςον τῶν ὀνομάτων τούτων μετὰ τῶν προηγουμένων ἐννενήκοντα ἐννέα δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν ὅλους τοὺς ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἕως τῶν χιλίων ἀριθμούς.

10. Κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον ὁ ἀριθμὸς χίλια λαμβάνεται ὡς νέα μονὰς, καλουμένη χιλιὰς, καὶ ἀριθμοῦμεν κατὰ χιλιάδας. Ἵνα δὲ μὴ πολυπλασια-

σθῶσιν αἱ λέξεις, αἱ ὁποῖαι ἄλλως τε διὰ τὸ πολυσύνθετον ἀποβαίνουσι καὶ πολὺ μακραὶ, ἐκρίθη νὰ θεωρῆται ἡ χιλιὰς ὡς νέα ἀρχικὴ μονὰς, πρὸ τοῦ ὀνόματος τῆς ὁποίας τίθενται τὰ ὀνόματα τῶν ἐννεακοσίων ἐννενήκοντα ἐννέα ἀριθμῶν. Οὕτω λέγομεν μία χιλιὰς, δύο χιλιάδες, . . . ἐννέα, δέκα χιλιάδες, ἕνδεκα χιλιάδες, ... εἴκοσι χιλιάδες, ... ἑκατὸν χιλιάδες, ... ἐννεακόσιαι ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδες. Ἐννοεῖται δὲ, ὅτι ἡ δεκὰς χιλιάδος, ἢ ἡ μυριὰς εἶναι ἡ μονὰς τῆς πέμπτης τάξεως, ἡ δὲ ἑκατοντὰς χιλιάδος τῆς ἕκτης· ἐπιφέροντες δὲ κατόπιν ἀριθμοῦ τινος χιλιάδων τὰ ὀνόματα ὅλων τῶν κατωτέρων τῆς χιλιάδος ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἕως ἐννεακόσιαι ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδες καὶ ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα.

11. Ὁ τελευταῖος οὗτος ἀριθμὸς αὐξανόμενος κατὰ μονάδα, δίδει δέκα ἑκατοντάδας χιλιάδος, ἢ τὴν χιλιάδα χιλιάδων, εἰς τὴν ὁποίαν ἀπεδόθη τὸ ὄνομα ἑκατομμύριον. Παρομοίως ἡ συλλογὴ χιλίων ἑκατομμυρίων ἀποτελεῖ τὸ δισεκατομμύριον (1), καὶ ὁμοίως ἡ συλλογὴ χιλίων δισεκατομμυρίων τὸ τρισεκατομμύριον κτλ. διὰ τῶν ὁποίων ἀριθμοῦμεν, ὡς καὶ κατὰ χιλιάδας. Σημειοῦμεν δὲ, ὅτι τὸ ἑκατομμύριον εἶναι ἡ μονὰς τῆς ἑβδόμης τάξεως, ἡ δεκὰς ἑκατομμυρίου εἶναι ἡ τῆς ὀγδόης, ἡ ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου ἡ τῆς ἐννάτης κτλ.

12. Ἐκ τῶν εἰρημένων γίνεται ἤδη φανερὸν, ὅτι εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν διαφόρων ἀριθμῶν καὶ ἐπομένως εἰς τὴν ὀνοματολογίαν αὐτῶν, δὲν διετηρήσαμεν τὴν ἀρχὴν τῆς φυσικῆς ἀριθμήσεως διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς ἀρχικῆς μονάδος εἰς ἑαυτὴν πολλάκις, ἀλλ' ὅτι εἰς τὰ εἰδικὰ ὀνόματα τῶν μονάδων, δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων ἐπιφέροντες τὰ ὀνόματα χιλιὰς, ἑκατομμύριον κτλ. σχηματίζομεν τὴν ὀνοματολογίαν ὅσων δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Διὰ τοῦτο καὶ τὸ ἐκτεθὲν σύστημα τῆς ἀριθμήσεως ὀνομάζεται δεκαδικόν· ὁ δὲ ἀριθμὸς δέκα, ὅστις παριστᾷ πόσαι μονάδες κατωτέρας τάξεως ἀπαιτοῦνται εἰς ἀπαρτισμὸν μιᾶς ἐκ τῶν τῆς ἀνωτέρας, λέγεται βάσις τοῦ συστήματος.

Εὐκόλως ἐννοοῦμεν πρὸς τούτοις, ὅτι κατ' ἀναλογίαν ἠδυνάμεθα νὰ συστήσωμεν καὶ ἕτερα εἴδη ἀριθμήσεως, οἷον πενταδικὸν, ἑβδομαδικὸν, ὀγδοαδικὸν, δυοκαιδεκαδικὸν κτλ. κατὰ τὸν ἀριθμὸν, τὸν ὁποῖον ἠθέλαμεν ἐκλέξει ὡς βάσιν τοῦ συστήματος, οἷον πέντε, ἑπτὰ, ὀκτὼ, δυοκαίδεκα

(1) Τὰ ὀνόματα δισεκατομμύριον, τρισεκατομμύριον κτλ. κατὰ μὲν γραμματικὸν σχηματισμὸν ἀντιβαίνουσιν εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦ λογισμοῦ. Μεταχειριζόμεθα δὲ ταῦτα μόνον διὰ τὸ εὐσύνθετον τῆς λέξεως ὑπὸ τὴν σημασίαν ἑκατομμύριον δεύτερον, ἢ δευτέρας τάξεως, ἑκατομμύριον τρίτον, ἢ τρίτης τάξεως κτλ. ἀντὶ τῶν ἀλλοτρίων, διλιόνιον, τριλιόνιον.

κτλ. Εἰς τὴν περίστασιν δὲ ταύτην ὑποχρεούμεθα μὲν νὰ παραδεχθῶμεν καὶ νέαν ὀνοματολογίαν ἐξ ὀλιγωτέρων ἢ πλειόνων εἰδικῶν ὀνομάτων, οὐχὶ δὲ καὶ διαφόρους κανόνας τῆς πρὸς ἄλληλα συνθέσεως αὐτῶν.

§. γ΄. Περὶ τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.

13. Ἐπειδὴ τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν, ὅλα σχεδὸν, εἶναι πολυσύνθετα, ἐζητήθη διὰ τοῦτο σύντομος γραφὴ αὐτῶν, διὰ τῆς ὁποίας ὁ νοῦς ν᾽ ἀντιλαμβάνηται εὐκολώτερον καὶ ἀνεξαρτήτως τῆς λέξεως, τοὺς συλλογισμοὺς, οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ γίνωσι διὰ τὴν ἀνακάλυψιν τῶν ἰδιοτήτων, ἢ τῶν νόμων τῶν διαφόρων συνδυασμῶν αὐτῶν. Τοιοῦτος δὲ εἶναι ὁ σκοπὸς τῆς διὰ χαρακτήρων γραφῆς τῶν ἀριθμῶν, περὶ τῆς ὁποίας ἤδη διαλαμβάνομεν.

14. Κατὰ πρῶτον ἀπεδόθησαν διὰ τοὺς ἐννέα ἀρχικοὺς ἀριθμοὺς οἱ ἑξῆς χαρακτῆρες.

ἓν,	δύο,	τρία,	τέσσαρα,	πέντε,	ἓξ,	ἑπτὰ,	ὀκτὼ,	ἐννέα,
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8;	9.

Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ἕκαστος συνίσταται ἐκ μονάδων μιᾶς, ἢ πλειόνων τάξεων, αἱ μονάδες δὲ οἱασδήποτε τάξεως δὲν ὑπερβαίνουσι τὸν ἀριθμὸν ἐννέα, συμπεραίνομεν ἄρα, ὅτι αὐτοὶ οὗτοι οἱ χαρακτῆρες ἐπαρκοῦσι καὶ διὰ τὴν παράστασιν ἀριθμοῦ οἱουδήποτε· ἀρκεῖ μόνον διά τινος τρόπου νὰ διακρίνηται ἡ τάξις τῶν εἰς τὸν ἀριθμὸν ἐμπεριεχομένων διαφόρων μονάδων.

Πρὸς τοῦτο, παρὰ πᾶν ἄλλο χαρακτηριστικὸν, ἐτέθη κατὰ συνθήκην ἡ ἀρχὴ, ὅτι πᾶς χαρακτὴρ τιθέμενος πρὸς τ᾽ ἀριστερὰ ἄλλου νὰ ἐκφράζῃ μονάδας τῆς ἀμέσου μεγαλητέρας τάξεως, ἢ ὅτι εἰς σειράν τινα χαρακτήρων ὁ πρῶτος πρὸς τὰ δεξιὰ νὰ ἐκφράζῃ μονάδας ἁπλᾶς, ὁ ἀμέσως πρὸς τ᾽ ἀριστερὰ δεκάδας, ὁ τρίτος ἑκατοντάδας, καὶ ἐφεξῆς· ὥςε ἐκ τῆς θέσεως ἑκάςου νὰ διακρίνηται καὶ ἡ τάξις τῶν μονάδων αὐτοῦ. Κατὰ τὴν ἀρχὴν δὲ ταύτην δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὅλους τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς τετρακόσια ἑβδομήκοντα τρία συνιστάμενος ἐκ τριῶν μονάδων, 7 δεκάδων καὶ 4 ἑκατοντάδων, δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τῆς συναρμογῆς τῶν τριῶν τούτων χαρακτήρων· ὅθεν γράφεται 473.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς εἰκοσιοκτὼ χιλιάδες καὶ διακόσια τεσσαράκοντα πέντε, συγκείμενος ἐκ 5 μονάδων, 4 δεκάδων, 2 ἑκατοντάδων, 8 χιλιάδων, καὶ 2 δεκάδων χιλιάδος γράφεται 28245.

15. Ἀλλ᾽ ὑπάρχουσιν ἀριθμοὶ, οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουσι μονάδας ὅλων τῶν κατωτέρων τάξεων καὶ ἑπομένως αἱ θέσεις αὐτῶν δὲν κατέχονται ὑπὸ τῶν μνησθέντων χαρακτήρων, ὡς οἱ ἀριθμοὶ δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, κτλ.

οἱ ὁποῖοι δὲν περιέχουσιν ἁπλᾶς μονάδας, ἢ ὡς οἱ ἀριθμοὶ ἑκατὸν ὀκτώ, πεντακόσια τέσσαρα κτλ., εἰς τοὺς ὁποίους δὲν ἐμπεριέχονται δεκάδες, καὶ ὁμοίως ἄλλοι. Ἵνα γράψωμεν τοὺς τοιούτους ἀριθμούς, ἀνάγκη νὰ παραδεχθῶμεν νέον χαρακτῆρα, σημαίνοντα τὴν ἔλλειψιν ταύτην· οὗτος δὲ εἶναι ὁ χαρακτὴρ 0, ἢ τὸ καλούμενον μηδὲν καὶ μηδενικὸν, ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει μὲν τιμὴν καθ' ἑαυτὸν, δίδει δὲ τὸν ἀνήκοντα προσδιορισμὸν εἰς τοὺς ἄλλους χαρακτῆρας, ἐπέχων τὴν θέσιν τῶν ἐλλειπουσῶν μονάδων οἱασδήποτε τάξεως. Οὕτως οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ γράφονται 10, 20, 30, κτλ. ὁμοίως καὶ 108, 504 κτλ. Ὡσαύτως οἱ ἀριθμοὶ ἑκατὸν, διακόσια κτλ. στερούμενοι δεκάδων καὶ μονάδων γράφονται 100, 200, κτλ.

16. Σκεπτόμενοι ἤδη, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς συνίσταται ἐκ μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων κτλ. ὅτι ἡ συλλογὴ τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως ἰσοῦται τὸ πολὺ μὲ 9, καὶ ὅτι ἐν περιπτώσει ἐλλείψεως μονάδων μιᾶς τινος τάξεως ἀναπληροῦται ἡ θέσις αὐτῶν διὰ τοῦ μηδενικοῦ, πληροφορούμεθα, ὅτι οἱ δέκα οὗτοι χαρακτῆρες 1, 2, 3, ... 9, 0, συνδυαζόμενοι δύνανται νὰ παραστήσωσιν οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμόν. Κατ' αὐτὸν δὲ τὸν λόγον οἱ ἐννέα πρῶτοι χαρακτῆρες καλούμενοι σημαντικοὶ, ἔχουσι δύο τιμὰς τὴν μὲν ἀπόλυτον ἢ ἰδίαν, καὶ τοιαύτη εἶναι ἡ εἰς αὐτοὺς μεμονωμένους ἀποδοθεῖσα ἤδη τιμὴ, τὴν δὲ σχετικὴν, ὁποίαν δηλ. λαμβάνουσιν ὡς ἐκ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν κατέχουσι γραφόμενοι ἀριστερόθεν τῶν ἄλλων.

17. Παρατηροῦντες, ὅτι κατὰ τὰς ἀρχὰς τῆς ἀριθμήσεως αἱ μονάδες δεκάδες καὶ ἑκατοντάδες ἐκλαμβάνονται ὡς μονάδες ἁπλαῖ, ὁμοίως αἱ μονάδες δεκάδες καὶ ἑκατοντάδες χιλιάδων, ὡς ἁπλαῖ μονάδες χιλιάδων, καὶ ὁμοίως διὰ τὰ ἑκατομμύρια, δισεκατομμύρια κτλ. ἐννοοῦμεν ἀμέσως, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἐκφέρεται κατὰ διακεκριμμένα τμήματα μονάδων, χιλιάδων, ἑκατομμυρίων κτλ. Ἕκαστον τῶν ὁποίων σύγκειται ἐκ τριῶν τὸ πολὺ χαρακτήρων.

Τούτου τεθέντος, ὅταν οἰκειωθῶμεν μὲ τὸν τρόπον τοῦ γράφειν τοὺς ἐκ τριῶν χαρακτήρων ἀριθμοὺς, τουτέστι τοὺς ἀπὸ τοῦ 1 ἕως τοῦ 999· τότε αὐτοὺς τούτους ἐπαναλαμβάνοντες δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ἄλλον τινὰ οἱονδήποτε. Οὕτως ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸ τμῆμα τῶν ἀνωτέρω μονάδων, τὸ ὁποῖον δυνατὸν νὰ ἔχῃ τρεῖς, ἢ δύο ἢ καὶ ἕνα χαρακτῆρα, μετὰ τοῦτο δὲ προχωροῦντες γράφομεν τὰ ἑξῆς τμήματα πρὸς τὰ δεξιὰ κατὰ τάξιν τοῦ μεγέθους αὐτῶν. Καὶ ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν τμημάτων τούτων πρέπει νὰ παριστάνηται διὰ τριῶν χαρακτήρων, διὰ τοῦτο ἐν περιπτώσει ἐλλείψεων, ἀναπληροῦμεν αὐτὰς διὰ τοῦ μηδενικοῦ.

Π. χ. Ἵνα γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν τετρακόσια ἓξ δισεκατομμύρια, εἰκοσιοκτὼ ἑκατομμύρια διακοσίας πεντήκοντα χιλιάδες καὶ τετρακόσια ὀκτώ. — Ἀρχόμενοι ἀριστερόθεν γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸ τμῆμα τῶν δισεκατομμυρίων, μετὰ τοῦτο τὸ τῶν ἑκατομμυρίων, ἐφεξῆς δὲ τὸ τῶν χιλιάδων καὶ τὸ τῶν μονάδων, καὶ οὕτως ἔχομεν **406,028,250,408** ἢ **406028250408**.

18. Ἐπὶ τῆς παρατηρήσεως ταύτης ϛηρίζεται καὶ ὁ κανὼν τῆς ἀπαγγελίας παντὸς διὰ χαρακτήρων γεγραμμένου ἀριθμοῦ· τουτέστιν ἀρχόμενοι δεξιόθεν τέμνομεν αὐτὸν κατὰ τμήματα ἕκαστον συγκείμενον ἐκ τριῶν χαρακτήρων, ἐκτὸς τοῦ πρώτου πρὸς ἀριστερά, τὸ ὁποῖον δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ ἐκ δύο ἢ καὶ ἐξ ἑνὸς χαρακτῆρος· μετὰ ταῦτα δὲ ἀρχόμενοι ἀριστερόθεν ἐκφέρομεν ἕκαστον τμῆμα, ἀποδίδοντες εἰς αὐτὸ τὸ ἀνῆκον ὄνομα δηλαδὴ δισεκατομμύρια, ἑκατομμύρια κ. τ. λ. π. χ. ὁ ἀριθμὸς 70345601 διακριθεὶς εἰς τμήματα οὕτως 70,345,601 ἐμφαίνει 70 ἑκατομμύρια τριακοσίας τεσσαράκοντα πέντε χιλιάδας καὶ ἑξακοσίας μίαν μονάδας.

Παρομοίως 5 3 0 2 4 0 0 0 5 6 7 0 2, ἢ μᾶλλον 5,302,400,056,702 ἐκφράζει 5 τρισεκατομμύρια, 302 δισεκατομμύρια, 400 ἑκατομμύρια, 56 χιλιάδας, καὶ 702 μονάδας.

§. δ΄. Περὶ τῆς Ἀριθμήσεως τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

19. Εἰς τὸν ἀριθμὸν 5 ἐχαρακτηρίσαμεν μόνον ποῖοι λέγονται κλασματικοὶ ἀριθμοί. Ἐνταῦθα ἐρχόμεθα νὰ δώσωμεν καθαρὰν καὶ ἀκριβῆ ἰδέαν αὐτῶν, ὡς θεωροῦνται εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, καὶ ἑπομένως νὰ δείξωμεν τὸν τρόπον τῆς ἀριθμήσεως αὐτῶν καὶ τῆς παραστάσεως τῶν ἰδίων διὰ χαρακτήρων. Ἀρχόμεθα δὲ ἀπὸ μερικῶν παραδειγμάτων.

Ὑποτεθείσθω, ὅτι πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν τὸ μῆκος τινὸς ὑφάσματος· ἐὰν λάβωμεν ὡς μέτρον ἢ μονάδα τὸν πῆχυν καὶ φέρωμεν αὐτὸν ἅπαξ, δίς, τρίς, κτλ. ὁσάκις δύναται νὰ ἐμπεριληφθῇ, ἐπὶ τοῦ ὅλου μήκους τοῦ ὑφάσματος, θέλει συμβῇ δυοῖν θάτερον· ἢ ἡ μονάς, ὁ πῆχυς, θέλει ἐμπεριληφθῇ ἀκριβῶς κατ᾽ ἀκέραιον ἀριθμὸν ἐξ ὑποθέσεως 15 ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἕως τοῦ ἑτέρου ἄκρου τοῦ ὑφάσματος, καὶ τότε λέγομεν, ὅτι τὸ μῆκος αὐτοῦ περιέχει ἀκέραιον ἀριθμὸν 15 πήχεων· ἢ παρεκτὸς τούτου θέλει ἐναπολειφθῇ καί τι μέρος μικρότερον τοῦ πήχεως, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἑνώσωμεν μὲ τοὺς 15 πήχεις, καὶ οὕτω νὰ λάβωμεν τὸ ὅλον μῆκος. Ἵνα προσδιορίσωμεν τὸ κλάσμα, ἢ τὸ ἐναπολειφθὲν τοῦτο μέρος ἐπίσης κατὰ λόγον τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἢ τοῦ πήχεως, ἐννοοῦμεν κατὰ πρῶτον τὸν πῆχυν διῃρημένον εἰς δύο ἴσα μέρη, λεγόμενα ἡμίση, καὶ ἀντιπαραβάλλομεν τὸ ῥηθὲν ὑπόλοιπον μὲ ἓν τῶν δύο τούτων μερῶν. Ὅθεν, ἂν εὑρεθῇ ἴσον, λέγομεν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πήχεως. Οὕτω δὲ τὸ ὅλον μῆκος εἶναι 15 πήχεων καὶ ἡμίσεος.

Ἀλλὰ δυνατὸν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο νὰ ἦναι μεῖζον ἢ ἔλασσον τοῦ ἡμίσεος τοῦ πήχεως· τότε ἐννοοῦμεν παρομοίως τὸ ἥμισυ τοῦτο διῃρημένον εἰς δύο ἴσα μέρη, καλούμενα τέταρτα, καὶ παρατηροῦμεν ποσάκις τὸ τέταρτον τοῦτο ἄγεται ἐπὶ τοῦ προσδιοριστέου ὑπολοίπου· καὶ ἐὰν εἰσέρχηται ἀκριβῶς ἅπαξ ἢ τρὶς λέγομεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον ἰσοῦται μὲ τὸ τέταρτον ἢ τὰ τρία τέταρτα τοῦ πήχεως.

20. Συμπεραίνομεν ἤδη εὐκόλως, ὅτι ἀντὶ τῆς διαιρέσεως τῆς μονάδος εἰς δύο ἢ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη, δυνάμεθα ὁμοίως νὰ ἐννοήσωμεν αὐτὴν διαιρουμένην καὶ εἰς τρία ἴσα μέρη, καλούμενα τρίτα, καὶ εἰς πέντε, καλούμενα πέμπτα, καὶ ἐφεξῆς. Οὕτως ὑποτεθείσθω, ὅτι ὁ πῆχυς διῃρέθη εἰς δώδεκα ἴσα μέρη, καὶ ὅτι ἓν τῶν δώδεκα φέρεται ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου ἑπτάκις· ἄρα λέγομεν, ὅτι τὸ προσδιοριστέον ὑπόλοιπον ἰσοῦται μὲ ἑπτάκις τὸ δωδέκατον ἢ μὲ ἑπτὰ δωδέκατα τοῦ πήχεως· ὥστε τὸ ὅλον μῆκος τοῦ ὑφάσματος εἶναι 15 πήχεων καὶ ἑπτὰ δωδεκάτων.

21. Ἐκ τῶν εἰρημένων βλέπομεν ὅτι, ἵνα σχηματίσωμεν ἀκριβῆ ἰδέαν τῶν ποσοτήτων τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος, πρέπει νὰ ἐννοήσωμεν τὴν μονάδα, διῃρημένην εἰς ἀκέραιόν τινα ἀριθμὸν ἴσων μερῶν, ἐξ ὧν λαμβάνομεν τινὰ μόνον, οἷον ἕν, δύο, τρία κτλ. Τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν μερῶν τούτων ἀπαρτίζει τὸ κλάσμα. Ἐκ τούτου καὶ ἡ παράστασις τινὸς κλάσματος περιλαμβάνει ἀναγκαίως δύο ἀκεραίους ἀριθμούς, ἕνα μέν, ὅστις ἐμφαίνει τὰ μέρη τῆς μονάδος καὶ ὀνομάζεται παρονομαστὴς καὶ ἕτερον, ὅστις ἐμφαίνει πόσα τῶν μερῶν τούτων ἀπαρτίζουσι τὸ κλάσμα καὶ λέγεται ἀριθμητής. Οὕτω πέντε ὄγδοα τοῦ πήχεως εἶναι κλάσμα, εἰς τὸν σχηματισμὸν τοῦ ὁποίου ἐννοοῦμεν τὴν μονάδα διῃρημένην εἰς ὀκτὼ μέρη, ἐξ ὧν λαμβάνομεν τὰ πέντε, καὶ ὁ μὲν πέντε εἶναι ὁ ἀριθμητής, ὁ δὲ ὀκτὼ ὁ παρονομαστής. Παρομοίως εἰς τὸ κλάσμα δεκατρία εἰκοστὰ τῆς δραχμῆς οἱ δύο ἐκφερόμενοι ἀριθμοὶ δεκατρία καὶ εἴκοσι εἶναι ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς αὐτοῦ. Πρὸς τούτοις ἀμφότεροι οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς λέγονται καὶ ὅροι τοῦ κλάσματος.

22. Μετὰ τὴν ἀνωτέρω ἔκθεσιν τῆς ἐκτιμήσεως τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν σχετικῶς πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, βλέπομεν καθαρῶς ὅτι ἡ ἀρίθμησις αὐτῶν δὲν διαφέρει τῆς τῶν ἀκεραίων, εἰμὴ ὅτι πρέπει νὰ λάβωμεν ὡς μονάδα, ἢ ὡς ὅρον παραθέσεως, μέρος τι ὡρισμένον τῆς ἀρχικῆς μονάδος, τὸ ὁποῖον νὰ θεωρήσωμεν ὡς δευτερεύουσαν μονάδα. Οὕτως ἐκφέροντες τὸ κλάσμα πέντε ὄγδοα τοῦ πήχεως, ἐννοοῦμεν ποσότητα εἰς

τὴν ὁποίαν τὸ ὄγδοον τοῦ πήχεως, λαμβανόμενον ὡς εἰδικωτέρα μονάς, ἐμπεριέχεται πεντάκις· καὶ ὁμοίως καὶ εἰς τὰ ἄλλα. Οὕτω διακρίνεται καὶ ὁ ἐν ἀρ. 5 ἀποδοθεὶς ὁρισμὸς τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

23. Ἐπειδὴ διαιρέτης τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἢ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος, δύναται νὰ θεωρηθῇ οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμὸς, καὶ ἑπομένως αἱ εἰδικαὶ μονάδες εἶναι διάφοροι· διὰ τοῦτο δύο ἢ περισσότερα κλάσματα λέγονται ὁμοειδῆ, ὅταν ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ὡς τρία ὄγδοα καὶ πέντε ὄγδοα, καὶ λέγονται ἑτεροειδῆ, ὅταν διαφέρωσι κατὰ τοὺς παρονομαστὰς, οἷον δύο τρίτα, τρία τέταρτα, πέντε ἕκτα, κτλ.

24. Ἡ διὰ χαρακτήρων παράστασις τῶν κλασμάτων εἶναι συνέπεια τῆς ἀνωτέρω ἀριθμήσεως. Τῷ ὄντι ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος προσδιορίζεται ἀναποφεύκτως ἐκ τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ, ἐπεκράτησε νὰ τίθηται ὁ ἀριθμητὴς ἄνωθεν τοῦ παρονομαστοῦ, διακρινομένων τῶν ὅρων διὰ γραμμῆς. Οὕτω τὸ κλάσμα τρία τέταρτα γράφεται $\frac{3}{4}$· ὁμοίως ἑπτὰ ἔννατα γράφεται $\frac{7}{9}$ κτλ.

Ἀντιστρόφως $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{47}{72}$. κτλ. παριστάνουσι τὰ κλάσματα ἑπτὰ ὄγδοα, δεκατρία δέκατα πέμπτα, τεσσαράκοντα ἑπτὰ ἑβδομηκοστὰ δεύτερα κτλ. τουτέστι ἵνα ἀπαγγείλωμεν γεγραμμένον κλάσμα, ἐκφέρωμεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν, ὡς ἀκέραιον ἀριθμὸν, καὶ μετὰ ταῦτα τὸν παρονομαστὴν τροποποιοῦντες τὴν κατάληξιν τοῦ σεσημειωμένου ἀριθμοῦ κατὰ τὸν γραμματικὸν σχηματισμόν.

§. ε'. Περὶ τοῦ Ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ.

25. Καθ' ἑκάστην εἰς τὴν κοινωνίαν παρουσιάζονται διάφορα ζητήματα τῆς πρώτης ἀνάγκης, διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν ὁποίων ὑποχρεούμεθα κατὰ τὴν ἔννοιαν τῶν ζητημάτων, νὰ συνδυάσωμεν πολλαχῶς δύο ἢ περισσοτέρους τῆς αὐτῆς ἢ ἑτέρας φύσεως ἀριθμούς. Οἱ συνδυασμοὶ οὗτοι ἀφορῶντες ἐν γένει τὴν σύνθεσιν ἢ ἀποσύνθεσιν τῶν ἀριθμῶν, συνιστῶσι τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν, ἢ τὰς πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς, περὶ τῶν ὁποίων ἐνταῦθα δίδομεν προκαταρκτικήν τινα ἰδέαν. Προτείνοντες δὲ τὰ ἑξῆς κοινότατα ζητήματα, ἀναφερόμενα εἰς τὸ ἐμπόριον, προτιθέμεθα νὰ ἐξηγήσωμεν, πόθεν ἔλαβον τὴν ἀρχὴν αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις καὶ ποῖον σύνδεσμον ἢ σχέσιν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας.

Ζήτημα Α'.—Ἔμπορος πωλήσας ἔκ τινος ὑφάσματος πρῶτον 5 πήχεις καὶ $\frac{2}{3}$, δεύτερον 7 καὶ $\frac{1}{2}$ καὶ τρίτον 12 καὶ $\frac{3}{4}$, ζητεῖ νὰ γνωρίσῃ τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν πωληθέντων πήχεων.

Ἐξ αὐτῆς τῆς φύσεως τοῦ ζητήματος γίνεται φανερὸν, ὅτι οἱ τρεῖς οὑτοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ ἑνωθῶσιν εἰς ἕνα μόνον ἰσοδύναμον. Ἡ τοιαύτη σύνθεσις λέγεται πρόσθεσις τῶν ἀριθμῶν, ἐνταῦθα μὲν τῶν ἀνωτέρω συνθέτων ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος, ἄλλοτε δὲ ἄλλων.

Ζήτημα Β΄.—Ὑποθέτομεν, ὅτι οἱ ἀνωτέρω τρεῖς ἀριθμοὶ τῶν πωληθέντων πήχεων ἐλήφθησαν ἀπὸ ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἦτο 30 καὶ $\frac{2}{3}$, ζητεῖται ἤδη νὰ μάθωμεν πόσον εἶναι τὸ ἀπώλητον.

Ἐνταῦθα πρέπει νὰ ζητήσωμεν τὴν διαφορὰν, τὴν μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ὅλου μήκους τοῦ ὑφάσματος καὶ τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τοῦ πωληθέντος μέρους αὐτοῦ. Ἵνα εὕρωμεν δὲ τὴν διαφορὰν ταύτην, πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ ὅλου μήκους κατὰ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πωληθέντος μέρους. Ὥστε τὸ ζήτημα ἄγεται εἰς τὴν ἐλάτωσιν τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, καθ᾽ ὅσον ἐκφράζει ὁ δεύτερος, ἤτοι εἰς τὴν ἀφαίρεσιν του δευτέρου ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ πρώτου.

Ζήτημα Γ΄.—Ἠγόρασέ τις 48 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 25 δραχμὰς τὸν πῆχυν· ζητεῖ πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ διὰ τοὺς 48 πήχεις.

Ἡ ἐκφώνησις αὐτὴ τοῦ ζητήματος δίδει νὰ ἐννοήσωμεν, ὅτι ἵνα προσδιορίσωμεν τὸ ζητούμενον ἀντίτιμον τῶν 48 πήχεων, πρέπει νὰ λάβωμεν τὰς 25 δραχμὰς τεσσαράκοντα καὶ ὀκτάκις, ἢ νὰ λάβωμεν τὸ ἄθροισμα τεσσαράκοντα ὀκτὼ ἀριθμῶν ἴσων μὲ 25. Ἡ πρᾶξις αὐτη καλεῖται διὰ τοῦτο πολυπλασιασμός. Ἐπειδὴ δὲ συνίςαται εἰς τὸ νὰ λάβωμεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἴσων ἀριθμῶν, παρατηροῦμεν εὐκόλως ὅτι εἶναι μερικὴ περίςασις τῆς προθέσεως, περὶ τῆς ὁποίας ἀνεφέραμεν εἰς τὸ πρῶτον ζήτημα.

Προτείνομεν τὸ αὐτὸ ζήτημα μεταβάλλοντες μόνον τοὺς ἐν αὐτῷ ἀναφερομένους ἀριθμούς.

Ἠγόρασέ τις ὕφασμα πρὸς $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς δι᾽ ἕκαστον πῆχυν καὶ ζητεῖ τὴν πληρωτέαν ποσότητα διὰ τὰ $\frac{7}{16}$ τοῦ πήχεως.

Ἐνταῦθα ἐννοοῦμεν, ὅτι τοῦ πήχεως τιμωμένου πρὸς $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς, τὰ $\frac{7}{16}$ αὐτοῦ, καθὸ ἐκφράζοντα μέρος τῆς ὅλης ἀρχικῆς μονάδος, πρέπει νὰ τιμηθῶσι δι᾽ ἀναλόγου μέρους τῶν $\frac{3}{4}$, ὁποῖον παριστῶσι τὰ $\frac{7}{16}$· τουτέστιν, ἵνα ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ ζήτημα, πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{7}{16}$ τῶν $\frac{3}{4}$. Ἡ πρᾶξις αὐτη καλεῖται ὁμοίως πολυπλασιασμὸς τῶν δεδομένων κλασμάτων διὰ τὸν λόγον, ὅτι τὸ ζήτημα τοῦτο διαφέρει μόνον κατὰ τὰ δεδομένα· ἀπολύτως δὲ, ἤτοι ὡς πρὸς μόνην τὴν ἰδέαν θεωρούμενον, εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς τὸ ἀνωτέρω, τοῦ ὁποίου ἡ ἀνάλυσις ἐχαρακτήρισε τὸν πολυπλασιασμὸν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Εἶναι ἀληθὲς, ὅτι τὸ ὄνομα πολυπλασιασμὸς, φέρον ἐν γένει καὶ τὴν ἰδέαν τῆς αὐξήσεως, δὲν εἶναι κατάλληλον εἰς τὰς περιστάσεις, καθ᾽ ἃς ἡ πρᾶξις συνίσταται εἰς τὸ νὰ λάβωμεν ἀπὸ ἀριθμοῦ τινος μέρος, σημειούμένον διὰ κλάσματος· ἀλλὰ μὴ ἀποβλέποντες εἰς τὴν σημασίαν τοῦ ὀνόματος δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν πρᾶξιν ὑπὸ γενικωτέραν ἔποψιν, καὶ οὕτω νὰ συνδέσωμεν τὸν πολυπλασιασμὸν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μὲ τὸν πολυπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων. Διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι νὰ πολυπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἕτερον, σημαίνει νὰ συνθέσωμεν τρίτον ἀριθμὸν ἀπὸ τὸν πρῶτον, ὡς ὁ δεύτερος συντίθεται ἐκ τῆς μονάδος. Κατὰ τὴν ἔκφρασιν δὲ ταύτην ἐξάγεται, ὅτι, ὅταν μὲν ὁ δεύτερος ἀριθμὸς ἦναι ἀκέραιος, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸν πρῶτον τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἕτερος· ὅταν δὲ ἦναι κλάσμα, τότε πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου τοσοῦτόν τι μέρος, ὅσον παριστάνει ὁ δεύτερος.

Ζήτημα Δ΄.—Ἠγόρασέ τις 12 πήχεις ὑφάσματος διὰ δραχμῶν 84· ζητεῖται πόσον ἐτιμήθη ὁ πῆχυς;

Φανερὸν, ὅτι ἡ ζητουμένη τιμὴ πρέπει νὰ ἦναι ἀριθμὸς, ὅστις λαμβανόμενος δυοκαιδεκάκις, ἢ πολυπλασιαζόμενος ἐπὶ 12, πρέπει νὰ παράγῃ τὸν ἀριθμὸν 84. Ὅθεν τὸ ζήτημα ἄγεται εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν, ὅστις πολυπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον νὰ παράγῃ τὸν πρῶτον. Ἡ πρᾶξις αὕτη καλεῖται Διαίρεσις.

Ἵνα δώσωμεν τὸν λόγον τοῦ ὀνόματος τούτου, τὸ ὁποῖον ταὐτοχρόνως φέρει καὶ τὴν ἰδέαν τοῦ μερισμοῦ ἀριθμοῦ τινος εἰς πολλὰ μέρη, ὑποθέτομεν ὅτι πρόκειται νὰ μερίσωμεν ἐξίσου 84 δραχμὰς εἰς 12 ἀνθρώπους. Φανερὸν ὡσαύτως, ὅτι τὸ μέρος ἑκάστου εἶναι ἀριθμὸς, ὅστις πολυπλασιαζόμενος ἐπὶ 12 πρέπει νὰ παράξῃ τὸν 84· ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ἢ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 84 εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἐμπεριέχει ὁ δεύτερος 12, ἢ νὰ εὕρωμεν τρίτον ἀριθμὸν, ὅστις πολυπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον 12 νὰ παράγῃ τὸν πρῶτον 84, εἶναι μόνον διαφορὰ ὡς πρὸς τὴν ἐκφώνησιν, ἄλλως δὲ ἡ πρᾶξις εἶναι ἡ αὐτή.

Ἐπαναλαμβάνομεν τὸ αὐτὸ ζήτημα ἀντεισάγοντες κλάσματα ἀντὶ ἀκεραίων.

Ἠγόρασέ τις $\frac{5}{16}$ τοῦ πήχεως διὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς, ζητεῖται πόσον ἐτιμήθη ὁ πῆχυς;

Καὶ ἐνταῦθα ἡ ἀνάλυσις τοῦ ζητήματος ἀποδεικνύει, ὅτι πρέπει νὰ εὕρωμεν τρίτον ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{5}{16}$ νὰ ἀποτελῶσι τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, ἢ ἀριθμὸν, ὅστις πολυπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{5}{16}$ νὰ παράγῃ τὸν $\frac{3}{4}$. Πρέπει ἄρα καὶ ἐνταῦθα νὰ ἐκτελέσωμεν διαίρεσιν κατὰ τὴν ἑρμηνευθεῖσαν γενικὴν σημασίαν αὐτῆς, οὐχὶ δὲ κατὰ τὴν σημασίαν τοῦ μερισμοῦ εἰς ἴσα μέρη.

26. Ταῦτα καὶ πλεῖστα ἄλλα ζητήματα τὰ ὁποῖα ἠδυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὰς καθ᾽ ἑκάστην παρουσιαζομένας κοινὰς περιστάσεις, γενικώτερον ἐρευνώμενα ἀνάγονται εἰς τὰς εἰρημένας τέσσαρας πράξεις. Καὶ

ἐπειδὴ ἡ χρεία τῆς ἐπιλύσεως αὐτῶν καθίσταται ἀναπόφευκτος, πρέπει διὰ τοῦτο νὰ ἔχωμεν τὰ μέσα τοῦ ἐκτελεῖν ὅλας τὰς πρὸς τοῦτο ἐπιτηδείας πράξεις.

Ἡ Ἀριθμητικὴ, ἥτις εἶναι ἡ ἐπιστήμη τῶν ἀριθμῶν καθ᾽ ἑαυτοὺς καὶ πρὸς ἀλλήλους, ἔχει εἰδικὸν σκοπὸν νὰ συστήσῃ σταθεροὺς καὶ βεβαίους κανόνας ὅλων τῶν πράξεων, ὅσαι δύνανται νὰ γίνωσιν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν.

Τὸ πρῶτον τοῦτο μέρος τῆς Μαθηματικῆς περιλαμβάνει πρὸς τούτοις πλῆθος ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν, αἱ ὁποῖαι ἀνεκαλύφθησαν κατὰ τὰς γενομένας ἀναζητήσεις εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν κανόνων τούτων καὶ τὴν εὐχερεστέραν ἐφαρμογὴν αὐτῶν.

Θέλομεν ἐκθέσει τοὺς κανόνας τούτους διαδοχικῶς ἐνθυμούμενοι ὅτι, ἵνα καταστήσωμεν αὐτοὺς ἀνεξαρτήτους παντὸς εἴδους ζητήματος, πρέπει νὰ θεωρήτωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἀφῃρημένους· εἰς μόνον δὲ τὰς ἐφαρμογὰς, τὰς ὁποίας καταχωροῦμεν ἀσκήσεως χάριν, θέλομεν προτείνει ἀριθμοὺς συγκεκριμμένους.

Τέλος ἵνα προβῶμεν ἐκ τῶν ἁπλῶν εἰς τὰ σύνθετα ἀρχόμεθα ἀπὸ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ἀριθμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

§. α'. Περὶ Προσθέσεως.

27. Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμοὺς συνάπτομεν εἰς ἕνα ἰσοδύναμον· ἢ δοθέντων πολλῶν ἀριθμῶν, σχηματίζομεν ἕτερον, ἐμπεριέχοντα τόσας μονάδας, ὅσαι ὑπάρχουσιν εἰς ἕκαστον αὐτῶν κατ᾽ ἰδίαν.

Οἱ εἰς πρόσθεσιν προκείμενοι ἀριθμοὶ λέγονται προσθετέοι, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως καλεῖται ἀδιαφόρως κεφάλαιον, ἢ ὅλον ἢ ἄθροισμα.

28. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἡ πρόσθεσις, ἀφορῶσα τὸν σχηματισμὸν ἢ τὴν σύνθεσιν τῶν ἀριθμῶν, εἶναι συμπλήρωσις τῆς ἐκτεθείσης θεωρίας τῆς ἀριθμήσεως. Ἑπομένως δὲ καὶ ὁ φυσικώτερος τρόπος διὰ τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῆς συνίσταται εἰς τὴν διαδοχικὴν ἐπανάληψιν τῆς μονάδος εἰς ἕνα τῶν προσθετέων τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει ἕκαστος τῶν ἄλλων.

Τῷ ὄντι τοιαύτην ἁπλῆν ἀρίθμησιν ἐκτελοῦμεν κατὰ πρῶτον βοηθούμενοι διὰ τῶν δακτύλων, καθ᾽ ὅσον ἀφορᾷ τὴν πρόσθεσιν μικρῶν ἀριθμῶν καὶ μάλιστα τῶν ἐκφραζομένων δι᾽ ἑνὸς χαρακτῆρος. Οὕτω π. χ. εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 4 λέγομεν, 5 καὶ 1 συνιστῶσιν 6 καὶ 1 συνιστῶσιν 7 καὶ 1 συνιστῶσιν 8 καὶ 1 συνιστῶσιν 9· διὰ τὴν συχνὴν δὲ χρῆσιν ἐγχαράσσομεν εἰς τὴν μνήμην τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα, τὰ ὁποῖα ἔπειτα ἐκ τοῦ προχείρου ἀνακαλοῦμεν κατὰ τὴν χρείαν.—Οὕτως, ἵνα προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 5, 7, 8 καὶ 6, λέγομεν 5 καὶ 7 συνιστῶσι 12 καὶ 4 συνιστῶσι 16 καὶ 8 συνιστῶσι 24 καὶ 6 συνιστῶσι 30 τελικὸν ἄθροισμα.

Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ 7, 9, 6, 5, 8 καὶ 7, προστιθέμενοι δίδουσιν ἄθροισμα 42, κτλ.

29. Τὸν φυσικὸν τοῦτον τρόπον τῆς προσθέσεως ἔπρεπεν ἤδη νὰ ἀκολουθήσωμεν καὶ εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις. Ἀλλ᾽ ἐπειδή, ὅταν οἱ προσθετέοι ἦναι μεγάλοι, ἡ ἐργασία ἀποβαίνει εἰς μάκρος, συνάπτομεν κατ᾽ ἰδίαν τὰ διακεκριμμένα μέρη τῶν προσθετέων, ἢ τὰς ὁμοταγεῖς μονάδας αὐτῶν καὶ τὸ σύνολον τῶν μερικῶν τούτων ἀθροισμάτων ἀποτελεῖ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα. Ἐπιστηριζόμεθα δὲ ἐπὶ τοῦ ἀξιώματος, ὅτι τὸ ὅλον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν.

Ἔστω π. χ. νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 7453 καὶ 1534.

$$\begin{array}{r} 7453 \\ 1534 \\ \hline 8987 \end{array}$$

Ἀφοῦ γράψωμεν αὐτοὺς κατὰ στήλας ὁμοταγῶν μονάδων, ὑπάγομεν γραμμὴν ὁριζόντιον, καὶ ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων λέγομεν 4 καὶ 3 συνιστῶσιν 7· ὅθεν γράφομεν 7 ὑπὸ τὰς μονάδας. Προχωροῦντες δὲ εἰς τὰς δεκάδας λέγομεν παρομοίως, 5 καὶ 3 συνιστῶσιν 8 δεκάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας. Ὡσαύτως λέγομεν 4 καὶ 5 συνιστῶσιν 9, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας καὶ τέλος 7 καὶ 1 συνιστῶσιν 8 χιλιάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν χιλιάδων. Ὁ οὕτω δὲ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς 8987, σχηματιζόμενος ἐξ ὅλων τῶν μερῶν τῶν δεδομένων προσθετέων καὶ ἐκ μόνων τούτων, ἐμπεριέχει ὁλοκλήρους τοὺς προσθετέους μόνον, εἶναι ἄρα τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

30. Ἔστω προσέτι νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 5047, 859, 3507 καὶ 846.

Ἐνταῦθα ἐπειδὴ τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν μονάδων, δεκάδων κτλ. εἶναι 29 μονάδες, 13 δεκάδες, 21 ἑκατοντάδες καὶ 8 χιλιάδες, τουτέστιν ἀριθμοὶ ὑπερβαίνοντες τὸν ἀριθμὸν 9, τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦτο δὲν δύναται νὰ γραφθῇ κατὰ τοὺς ἐκτεθέντας κανόνας· θεραπεύομεν ὅμως τὴν δυσκολίαν συνάπτοντες μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων τὰς 2 δεκάδας τοῦ ἀθροίσματος τῶν μονάδων, καὶ ὁμοίως μὲ τὸ τῶν ἑκατοντάδων τὴν 1 ἑκατοντάδα τοῦ ἀθροίσματος τῆς στήλης αὐτῶν καὶ τέλος μὲ τὸ τῶν χιλιάδων τὰς 2 χιλιάδας τὰς ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἑκατοντάδων, καὶ οὕτω λαμβάνομεν ἄθροισμα 10259.

5047
859
3507
846
29
13
21
8
10259

31. Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι γενική· ὅθεν συμπεραίνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα. Ἵνα προσθέσωμεν ὁσουσδήποτε ἀκεραίους ἀριθμοὺς, γράφομεν αὐτοὺς τὸν μὲν ὑπὸ τὸν δὲ, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ σχηματίζωσιν ἰδίαν στήλην, καὶ ὑπάγομεν γραμμήν. Ἀρχόμενοι δὲ δεξιόθεν καὶ προχωροῦντες πρὸς ἀριστερὰν προσθέτομεν ἑκάστην στήλην, κάτωθεν τῶν ὁποίων γράφομεν τὰ λαμβανόμενα μερικὰ ἀθροίσματα, προσέχοντες νὰ συνάπτωμεν μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς ἀμέσως πρὸς ἀριστερὰν ἀνωτέρας ϛήλης, τὰς λαμβανομένας ὁμοταγεῖς μονάδας ἀπὸ τῆς προσθέσεως τῆς προτέρας.

Ἰδοὺ καὶ ἄλλα παραδείγματα.

7861	66947	786354
385	4608	7856
8023	96352	67008
16269	894	9435
	168801	813
		871466

§. 6ʹ. Περὶ Ἀφαιρέσεως.

32. Ἡ ἀφαίρεσις ἔχει τὸν ἀντίθετον σκοπὸν τῆς προσθέσεως, τουτέστι δεδομένον τινὰ ἀριθμὸν νὰ ἐλαττώσωμεν κατὰ τοσαύτας μονάδας, ὅσας ἔχει τις ἕτερος· ἢ δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν καὶ ἑνὸς τῶν προσθετέων νὰ εὕρωμεν τὸν ἕτερον.

Ἐκ τῶν δύο ὅρων τῆς ἀφαιρέσεως ὁ μὲν μαγαλήτερος λέγεται μειωτέος, ὁ δὲ μικρότερος ἀφαιρετέος, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως καλεῖται ὑπόλοιπον, ἔτι δὲ καὶ ὑπεροχὴ ἢ διαφορά· διότι ταυτοχρόνως παριστᾷ κατὰ πόσον ὁ μεγαλήτερος ὑπερέχει τὸν μικρότερον, ἢ κατὰ πόσον οἱ δύο διαφέρουσιν ἀλλήλων, μὴ λαμβανομένης ὑπ᾽ὄψιν τῆς ἰδίας ἑκατέρου τιμῆς.

33. Ἵνα φθάσωμεν εἰς τὸν σκοπὸν τῆς ἀφαιρέσεως, πρέπει ἄρα κατὰ τὸν

ὁρισμὸν αὐτῆς νὰ ἀκολουθήσωμεν ὁδὸν ὅλως ἀντίστροφον τῆς προσθέσεως, τουτέστιν εἰς τὴν σειρὰν τῶν ὀνομάτων τῶν ἀριθμῶν πρέπει ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ μειωτέου νὰ διέλθωμεν διαδοχικῶς ὅλους τοὺς κατὰ μονάδα μικροτέρους ἀριθμοὺς ἕωσοῦ ἐξαντληθῶσιν αἱ μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου. Οὕτω θέλομεν φθάσει εἰς τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει τὴν ζητουμένην διαφοράν. π. χ. ἵν' ἀφαιρέσωμεν 4 ἀπὸ τοῦ 9, βοηθούμενοι παρομοίως ὑπὸ τῶν δακτύλων λέγομεν ὀκτὼ, ἑπτὰ, ἕξ, πέντε· ὁ τελευταῖος δὲ οὗτος ἀριθμὸς 5 εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ 9 καὶ 4, ἢ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ 9 ὑπὲρ 4. Παρατηροῦντες δὲ, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον ἔχει τὴν ἰδιότητα προστιθέμενον μετὰ τοῦ ἀφαιρετέου νὰ παράγῃ τὸν μειωτέον, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ ὑπόλοιπον καὶ δι' ἁπλῆς ἀριθμήσεως, αὐξάνοντες τὸν ἀφαιρετέον κατὰ μονάδα, ἕωσοῦ προκύψῃ ὁ μειωτέος. Οὕτω δὲ διὰ τὸ εὐχερέστερον τῆς πράξεως συνήθως γίνεται ὑπὸ τῶν ἀρχαρίων ἡ ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἐκφραζομένου δι' ἑνὸς χαρακτῆρος ἀπὸ ἀριθμὸν μὴ ὑπερβαίνοντα τὸν 18, ἕως ὅτου διὰ τῆς ἀσκήσεως ἐντυπωθῶσιν εἰς τὴν μνήμην τὰ μερικὰ ταῦτα ὑπόλοιπα, τὰ ὁποῖα θεωροῦνται ὡς ἡ βάσις τῆς ἀφαιρέσεως ἐν γένει.

34. Ἀλλ' ἐπειδὴ, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἦναι μεγάλοι, ἀμφότεροι οἱ ἀνωτέρω τρόποι ἀποβαίνουσι δυσχερέστατοι, συντέμνομεν διὰ τοῦτο τὴν πρᾶξιν διὰ μερικῶν ἀφαιρέσεων, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν διὰ μερικῶν ἀθροισμάτων· ἀφαιροῦμεν δηλαδὴ τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν μονάδων τοῦ μειωτέου, καὶ ὁμοίως τὰς δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν δεκάδων τοῦ μειωτέου καὶ ἐφεξῆς· τὸ σύνολον δὲ τῶν μερικῶν τούτων ὑπολοίπων συνιστᾷ τὴν ὅλην διαφοράν.

π. χ. ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ	9587
ἔστω νὰ ἀφαιρέσωμεν	1345
	8242

Ἀφοῦ γράψωμεν αὐτοὺς κατὰ στήλας ὁμοταγῶν μονάδων, ὑπάγομεν γραμμὴν καὶ ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων λέγομεν·

5	ἀφαιρουμένου ἀπὸ	7	ὑπολείπεται	2
4	» »	8	»	4
3	» »	5	»	2
1	» »	9	»	8

Ὁ οὕτω δὲ σχηματιζόμενος ἀριθμὸς 8242 προσδιορίζει τὴν μεταξὺ τῶν δεδομένων διαφοράν.

Ἡ ἀκρίβεια τῆς πράξεως ταύτης θεμελιοῦται ἐπὶ τοῦ ἀξιώματος ὅτι, ἀφαιρουμένων ἀπὸ τοῦ μειωτέου ὅλων τῶν μερῶν τοῦ ἀφαιρετέου, ἀφαιρεῖται ὅλος ὁ ἀφαιρετέος.

35. Δὲν συμβαίνει ὅμως πάντοτε ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα. Διότι

πολλάκις χαρακτὴρ τις τοῦ ἀφαιρετέου δὲν δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου εἰς τὸν μειωτέον. Ὅθεν ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου ταύτης ἀπαιτεῖ ἰδιαιτέρας παρατηρήσεις.

Ἔστω π. χ. νὰ ἀφαιρέσωμεν 397 ἀπὸ τοῦ 534. Ἀφοῦ διατάξωμεν κατὰ πρῶτον τοὺς δύο ὅρους, ὡς καὶ εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ἀρχίζομεν τὴν ἀφαίρεσιν. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ χαρακτὴρ 7 τῶν μονάδων τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μικρότερος τοῦ ἀντιστοίχου 4 εἰς τὸν μειωτέον, καὶ ὁμοίως ὁ χαρακτὴρ 9 τῶν δεκάδων εἶναι μικρότερος τοῦ 3, δὲν δύναται διὰ τοῦτο νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις. Εἰς τὴν παροῦσαν περίστασιν δίδομεν ἄλλην ἰσοδύναμον παράστασιν τοῦ μειωτέου, τουτέστι λαμβάνομεν μίαν ἐκ τῶν 3 δεκάδων αὐτοῦ, τὴν ὁποίαν ἀναλύοντες εἰς 10 δεκάδας συνάπτομεν μετὰ τῶν 4 μονάδων τοῦ ἰδίου καὶ οὕτως ἔχομεν μονάδας μὲν ἁπλᾶς 14, δεκάδας δὲ 2. Καὶ ὁμοίως λαμβάνομεν μίαν ἐκ τῶν 5 ἑκατοντάδων, τὴν ὁποίαν ἀναλύοντες εἰς 10 δεκάδας συνάπτομεν μετὰ τῶν ὑποληφθεισῶν 2. Ὥστε ἔχομεν ἑκατοντάδας μὲν 4, δεκάδας δὲ 12· μετὰ τὴν ἀνάλυσιν δὲ ταύτην ὁ αὐτὸς μειωτέος 534 παρίσταται ὑπὸ τὴν μορφὴν 4 ἑκατοντάδας, 12 δεκάδες, καὶ 14, μονάδες, ὡς φαίνεται εἰς τὸ παράδειγμα. Ὅθεν προβαίνοντες εἰς τὴν ἀφαίρεσιν λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 137.

4	12	14
5	3	4
3	9	7
1	3	7

Ὁ τρόπος οὗτος συνίσταται, ὡς βλέπομεν εἰς τὸ νὰ δανειζώμεθα παρὰ τοῦ προηγουμένου χαρακτῆρος μίαν μονάδα τῆς ἀνωτέρας τάξεως, τὴν ὁποίαν ἀναλελυμένην εἰς δέκα τῆς ἀμέσου κατωτέρας νὰ συνάπτωμεν μετὰ τοῦ χαρακτῆρος ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐργαζόμεθα, προσέχοντες νὰ ἐλαττοῦμεν κατὰ μονάδα τὸν προηγούμενον χαρακτῆρα, παρὰ τοῦ ὁποίου ἐδανείσθημεν.

36. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ὑπεθέσαμεν ἐν τοσούτῳ, ὅτι ὁ ἡγούμενος χαρακτὴρ, παρὰ τοῦ ὁποίου δανειζόμεθα εἶναι σημαντικὸς, ἢ ὅτι ἔχομεν μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ἀλλὰ δυνατὸν ὁ χαρακτὴρ οὗτος νὰ ἦναι καὶ τὸ μηδενικὸν, ὡς π. χ. ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 7002 νὰ ἀφαιρέσωμεν 3497. Ἐνταῦθα ἐπειδὴ εἶναι πραγματικῶς ἀδύνατον νὰ ἀφαιρέσωμεν 7 μονάδας ἀπὸ 2, ἀνατρέχομεν ἕως τοῦ σημαντικοῦ χαρακτῆρος 7, τῶν χιλιάδων τοῦ μειωτέου, παρὰ τοῦ ὁποίου δανειζόμενοι μίαν μονάδα ἀναλύομεν αὐτὴν εἰς 10 ἑκατοντάδας· ἐκ τούτων τὰς 9 γράφομεν εἰς τὴν τάξιν τῶν ἐλλειπουσῶν ἑκατοντάδων, τὴν δὲ μίαν ἑκατοντάδα ἰσοδύναμον μὲ 10 δεκάδας ἀναλύομεν παρομοίως εἰς 9 δεκάδας τὰς ὁποίας γράφομεν εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκάδων καὶ εἰς μίαν δεκάδα, τὴν ὁποίαν ὡς δέκα ἁπλᾶς μονάδας συνάπτομεν μετὰ τῶν 2 ἁπλῶν μονάδων τοῦ μειωτέου. Οὕτω δὲ ἀναλυόμενος ὁ μειωτέος 7002 παρίσταται ὑπὸ τὴν μορφήν.

	χιλ.	ἑκατ.	δεκ.	μονάδ.
	6	9	9	12
ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφαιροῦντες	3	4	9	7
λαμβάνομεν ὑπόλοιπον	3	5	0	5

Ὅθεν ὁ ἀριθμὸς 3505 εἶναι τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

37. Τέλος πάντων, ἐπειδὴ δύο ἄνισα ποσὰ αὐξανόμενα ἐπίσης διατηροῦσι τὴν αὐτὴν διαφοράν, δυνάμεθα νὰ εὐκολύνωμεν τὴν πρᾶξιν εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἀνωτέρω περιστάσεις χωρὶς νὰ μετασχηματίσωμεν τὸν μειωτέον. Οὕτως εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ ἀριθμοῦ 35 θεωροῦμεν νοερῶς τὸν χαρακτῆρα 4 μονάδων τοῦ μειωτέου ὡς ηὐξημένον κατὰ 10 ἤτοι ὡς 14 καὶ ἐκτελοῦμεν ἐπ' αὐτοῦ τὴν ἀφαίρεσιν, τὸν δὲ πρὸ τούτου χαρακτῆρα 3 τῶν δεκάδων, ἀντὶ νὰ ἐλαττώσωμεν κατὰ μονάδας, διατηροῦμεν αὐτὸν ὡς ὑπάρχει, λογιστικῶς δὲ αὐξάνομεν κατὰ μονάδα, τὸν ἀντίστοιχον αὐτοῦ 9 εἰς τὸν ἀφαιρετέον. Ὅθεν λέγομεν 9 καὶ 1 συνιστῶσι 10, ἀπὸ τοῦ 13 ὑπολείπεται 3, καὶ ὁμοίως εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων 3 καὶ 1 συνιστῶσι 4, ἀπὸ τοῦ 5 ὑπολείπεται 1.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα τὰ δύο μηδενικά, τὰ ὁποῖα ἀντεκατεστάθησαν ὑπὸ τοῦ χαρακτῆρος 9, δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν ὡς 10, τοὺς δὲ ἀντιστοιχοῦντας εἰς ταῦτα χαρακτῆρας, τοῦ ἀφαιρετέου, ὡς ηὐξημένου κατὰ μονάδα. Κατὰ τὴν παρατήρησιν δὲ ταύτην ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, ὡς ἕπεται.

534	7002
397	3497
137	3505

38. Ἀνακεφαλαιοῦντες ἤδη τὰς ἀνωτέρω παρατηρήσεις συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα. Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν ἀπὸ ἀκεραίου, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον καὶ ὑπάγομεν γραμμήν. Ἀρχόμενοι δὲ δεξιόθεν ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς ἕκαστον χαρακτῆρα τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου εἰς τὸν μειωτέον καὶ γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν τὰ μερικὰ ὑπόλοιπα, τῶν ὁποίων τὸ σύνολον ἀποτελεῖ τὴν ζητουμένην διαφοράν. Ἂν δὲ συμβῇ νὰ ἀφαιρέσωμεν μεγαλήτερον χαρακτῆρα ἀπὸ μικρότερον, ἢ σημαντικὸν χαρακτῆρα ἀπὸ μηδενικόν, ἐννοοῦμεν τὸν μικρότερον χαρακτῆρα αὐξανόμενον κατὰ 10 καὶ ὁμοίως τὸ 0 ὡς 10 καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν προσέχοντες ὅμως εἰς τὴν προσεχῆ μερικὴν ἀφαίρεσιν νὰ αὐξήσωμεν κατὰ μονάδα τὸν χαρακτῆρα τοῦ ἀφαιρετέου.

Ἰδοὺ καὶ ἕτερα παραδείγματα·

32704	500047	1234567
9542	238789	567894
23162	261258	666673

§. γ΄. Βάσανος τῆς Προσθέσεως καὶ Ἀφαιρέσεως.

39. Ἂν καὶ οἱ συσταθέντες κανόνες ἐπεστηρίχθησαν ἐπὶ ἀναντιῤῥήτων ἀποδείξεων, ἡ ἐφαρμογὴ ὅμως αὐτῶν, εἴτε δι᾽ ἐσφαλμένην ἀνάπολησιν τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων ἢ ὑπολοίπων, εἴτε διὰ παραδρομὴν τῆς χειρὸς, εἴτε διὰ παράλειψιν τινὸς χαρακτῆρος κτλ. δυνατὸν νὰ ἦναι ἐσφαλμένη. Ὅθεν πρὸς πληροφορίαν, ὅτι τοῦτο ἔπρεπε νὰ ἦναι τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον, καταφεύγομεν εἰς πρᾶξιν ἀντίστροφον τῆς ἐκτελεσθείσης, διὰ τῆς ὁποίας ἀναγνωρίζεται ἡ ἀκρίβεια αὐτοῦ. Ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται βάσανος.

Ἡ βάσανος τῆς προσθέσεως στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ταύτης. Ἐπειδὴ τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα συνετέθη ἐκ μόνων τῶν μερῶν τῶν προσθετέων, ἕπεται ἄρα, ὅτι καὶ ἂν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἀφαιρεθῶσι διαδοχικῶς ὅλα ταῦτα τὰ μέρη, μετὰ τὴν ἀποσύνθεσιν ταύτην πρέπει νὰ προκύψῃ ὑπόλοιπον μηδέν. Εἰς τὸ προκείμενον παράδειγμα ἐξηγοῦμεν τὸν τρόπον τῆς τοιαύτης ἀποσυνθέσεως. Κατὰ πρῶτον ἀρχόμενοι ἀριστερόθεν προσθέτομεν τὴν ἀνωτέραν στήλην καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῆς 11 χιλιάδας ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ τῶν ἀντιστοιχουσῶν 12 χιλιάδων τοῦ ὅλου ἀθροίσματος, λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 1 χιλιάδα, τὴν ὁποίαν γράφομεν ὑπὸ τὰς χιλιάδας· ἀναλύοντες δὲ αὐτὴν εἰς 10 ἑκατοντάδας συνάπτομεν αὐτὰς μετὰ τοῦ προσεχοῦς χαρακτῆρος 9 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀθροίσματος· ὥστε ἐννοοῦμεν 19 ἑκατοντάδας. Προσθέτομεν ἑπομένως τὴν ἑξῆς στήλην τῶν ἑκατοντάδων, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν 18 ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῶν 19 ἑκατοντάδων τοῦ ὅλου ἀθροίσματος, λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 1, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας. Συνάπτοντες ὁμοίως τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο μετὰ τῶν ἑξῆς 3 δεκάδων τοῦ ὅλου ἀθροίσματος ἐννοοῦμεν 13 δεκάδας αὐτοῦ, προσθέτομεν ἀκολούθως τὴν στήλην τῶν δεκάδων, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν 11 ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῶν 13 δεκάδων. Οὕτω λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 2, τὸ ὁποῖον συνάπτομεν παρομοίως μετὰ τῶν 9 μονάδων καὶ οὕτως ἐννοοῦμεν 29 μονάδας. Τέλος προσθέτοντες τὴν στήλην τῶν μονάδων λαμβάνομεν ἄθροισμα 29, ἀφαιρούμενον ἐντελῶς ἀπὸ τῶν 29 μονάδων τοῦ ὅλου ἀθροίσματος. Ἡ τελευταῖα αὕτη πρᾶξις ἐπιβεβαιοῖ ἐκ τῶν ὑστέρων, ὅτι ὁ πρὶν εὑρεθεὶς ἀριθμὸς 12939 συγκροτεῖται ἐκ μόνων τῶν μερῶν τῶν προσθετέων, ἑπομένως εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

$$\begin{array}{r} 527 \\ 2519 \\ 9812 \\ 73 \\ 8 \\ \hline 12939 \\ \hline 1120 \end{array}$$

40. Ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος γενικῶς ἐκφράζεται κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα. —Ἵνα ἐπιβεβαιώσωμεν τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως, ἀρχόμενοι ἀριστερόθεν προσθέτομεν ἐκ δευτέρου τὴν ἀνωτέραν στήλην καὶ ἀφαιροῦμεν

τὸ ἄθροισμα ἀπὸ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος μέρους τοῦ ὅλου ἀθροίσματος, λαμβάνομεν ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπ' αὐτὴν τὴν στήλην, συνάπτομεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο μετὰ τοῦ προσεχοῦς χαρακτῆρος τοῦ ὅλου ἀθροίσματος καὶ ἀπὸ τοῦ οὕτως ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ ἀφαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα τῆς δευτέρας στήλης. Ὁμοίως πράττομεν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων στηλῶν μέχρι τῆς τελευταίας τῶν ἁπλῶν μονάδων, καὶ ἐάν, μὴ κωλυομένης τῆς βασάνου κατὰ τὰς μερικὰς ταύτας ἀφαιρέσεις, λάβωμεν διὰ τελευταῖον ὑπόλοιπον τὸ μηδέν, λέγομεν, ὅτι ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

41. Ὡσαύτως ἡ βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως συνάγεται ἀμέσως ἐξ αὐτῆς τῆς φύσεως τοῦ ἐξαγομένου. Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγαλητέρου ἐπὶ τοῦ μικροτέρου, ἄρα ὁ μικρότερος, αὐξανόμενος κατὰ τὸ εὑρεθὲν ὑπόλοιπον πρέπει νὰ παράξῃ τὸν μεγαλήτερον. Κατ' αὐτὸν τὸν λόγον δυνάμεθα ἐκ τῶν ὑστέρων νὰ ἐπιβεβαιώσωμεν τὸ ἀκριβὲς τῆς ἀφαιρέσεως δι' ἁπλῆς προσθέσεως τοῦ ἀφαιρετέου μετὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου, ὅτε πρέπει νὰ λάβωμεν δι' ἄθροισμα τὸν μειωτέον.

Π. χ. ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ	35062
ἀφαιροῦντες	28975
εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον	6087
Βάσανος	35062

Πρόβλημα.—Τραπεζίτης ἔχων εἰς τὸ Ταμεῖον 65750 δραχμὰς ἐπλήρωσεν ἐξ αὐτῶν πρῶτον 13259 δεύτερον 18704, τρίτον 22050 καὶ τέταρτον 9850. —Ζητεῖται ἤδη πόσα ἔμειναν εἰς τὸ ταμεῖον;

Λύσις. — Ἀφοῦ συναφθῶσιν εἰς ἓν τὰ τέσσαρα ποσὰ τῶν πληρωμῶν, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὴν ὅλην ποσότητα τοῦ ταμείου. Οὕτω δὲ τὸ ἐξαγόμενον ἐκφράζει τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον. Ἰδοὺ ὁ πίναξ τοῦ ὑπολογισμοῦ.

	13259		65750
	18704		63863
	22050		1887
	9850	Βάσανος	65750
	63863		
Βάσανος	21110		

Ἀπόκρισις.—Εὑρίσκονται εἰς τὸ ταμεῖον δραχ. 1887.

§. δ΄. Περὶ Πολυπλασιασμοῦ.

42. Εἰς τὸ Γ΄. Ζήτημα τοῦ ἀριθ. 25 ἐξηγήσαμεν ἀρκούντως τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολυπλασιασμοῦ ὑπὸ τὴν καθολικὴν σημασίαν αὐτοῦ· ὅτι δηλαδὴ εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, πρόκειται νὰ εὕρωμεν τρίτον, ὅστις νὰ συντίθεται ἐκ τοῦ πρώτου, ὡς δεύτερος ἐκ τῆς μονάδος· ὁ μὲν πρῶτος τῶν δύο ἀριθμων, ἐκ τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ σχηματίσωμεν τὸν ζητούμενον, λέγεται πολυπλασιαστέος, ὁ δὲ δεύτερος, ὅστις ἐμφαίνει τὸν τρόπον τοῦ σχηματισμοῦ, ἢ ποσάκις πρέπει νὰ λάβωμεν τὸν πρῶτον, λέγεται πολυπλασιαστὴς, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως, ἤτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, λέγεται γινόμενον. Πρὸς τούτοις ἀμφότεροι οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ πολυπλασιαστέος καὶ πολυπλασιαστὴς λέγονται παράγοντες τοῦ γινομένου.

43. Καθόσον ἤδη ἀνεπτύξαμεν καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν 25, ὁ πολυπλασιασμὸς ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν εἶναι μερική τις περίςασις τῆς προσθέσεως. Διότι, ἵνα λάβωμεν τὸ γινόμενον, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὸν πολυπλασιαςέον ἐπανειλημμένως ὑφ᾽ ἑαυτὸν τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολυπλασιαςὴς, καὶ νὰ συνάψωμεν ἑπομένως ὅλους τούτους κατὰ τὸν γνωςὸν κανόνα τῆς προσθέσεως. Ἀλλ᾽ ὁ τρόπος οὗτος τοῦ ὑπολογίζεσθαι εἶναι μακρὸς καὶ ἐπίπονος, καὶ μάλιστα, ὅταν ὁ πολυπλασιαστὴς συντίθεται ἐκ πολλῶν χαρακτήρων· ἐζητήθη διὰ τοῦτο συντομώτερον μέσον διεξαγωγῆς τῆς πράξεως ταύτης, καὶ εἰς τοῦτο ἀφορᾷ ἡ ἐνταῦθα ἐκτιθεμένη θεωρία τοῦ πολυπλασιασμοῦ.

44. Καθὼς εἰς τὰς προλαβούσας δύο πράξεις ἐλάβομεν τὰ τελικὰ ἐξαγόμενα διὰ μερικῶν προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων, καὶ οὕτω συνετέμομεν τὴν πρᾶξιν, ὁμοίως καὶ ἐνταῦθα θέλομεν ἀναζητήσει, πῶς διὰ τῶν μερικῶν πολυπλασιασμῶν χαρακτῆρος ἐπὶ χαρακτῆρα ὅλων τῶν χαρακτήρων τῶν δύο παραγόντων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν οἱωνδήποτε. Διὰ τοῦτο καὶ τὰ γινόμενα ταῦτα χαρακτῆρος ἐπὶ χαρακτῆρα, θεωρούμενα ὡς τὰ πρῶτα στοιχεῖα τῆς συνθέσεως παντὸς γινομένου, σχηματίζουσι τὴν προπαίδειαν τοῦ πολυπλασιασμοῦ, εἰς τὴν ὁποίαν οἱ ἀρχάριοι πρέπει νὰ ἐξασκήσωσι καλῶς τὴν μνήμην.

Ἵνα λάβωμεν ἤδη τὰ γινόμενα ταῦτα ἐξ ὑποθέσεως τὸ τοῦ 7 πολυπλασιαζομένου ἐπὶ 5, πρέπει νὰ προσθέσωμεν ἐπανειλημμένως τὸν πρῶτον 7 τετράκις εἰς ἑαυτόν· οὕτω λέγομεν 7 καὶ 7 συνιστῶσιν 14 καὶ 7 συνιστῶσιν 21 καὶ 7 συνιστῶσιν 28 καὶ 7 συνιστῶσι 35. Ὁ τελευταῖος δὲ οὗτος ἀριθμὸς 35, ὢν τὸ ἄθροισμα τῶν πέντε ἴσων μὲ 7, εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ 5.

45. Ἑωσοῦ ἐξασκήσωμεν τὴν μνήμην, ἀντὶ τῆς συνεχοῦς ταύτης προσθέσεως, βοηθούμεθα ἀπὸ τὸν ἑξῆς πίνακα τοῦ πολυπλασιασμοῦ, ὅςις ἐμπεριέχει ὅλα ταῦτα τὰ μερικὰ γινόμενα. Ὁ πίναξ οὗτος καλεῖται καὶ Πυθαγορικὸς ἀπὸ τοῦ Πυθαγόρου τοῦ ἐφευρέτου ἢ τοὐλάχιστον τοῦ πρώτου, ὅστις διέδωκε τὴν χρῆσιν αὐτοῦ.

Πίναξ τοῦ Πολυπλασιασμοῦ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ἵνα σχηματίσωμεν τὸν προκείμενον πίνακα, γράφωμεν κατὰ πρῶτον καθ' ὁριζόντιον γραμμὴν τοὺς ἐννέα χαρακτῆρας, 1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 8, 9, διακρίνοντες αὐτοὺς διὰ καθέτων γραμμῶν.

Ὑπάγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὁριζόντιον γραμμὴν καὶ προσθέτοντες ἕκαςον εἰς ἑαυτὸν λαμβάνομεν οὕτω τὰ διπλάσια αὐτῶν τὰ ὁποῖα γράφομεν ὑπ' αὐτοὺς εἰς τὴν δευτέραν ὁριζόντιον ζώνην.

Ὑπάγομεν ὁμοίως δευτέραν ὁριζόντιον γραμμὴν καὶ προσθέτομεν ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς δευτέρας ζώνης μὲ τὸν ἀντίςοιχον αὐτοῦ εἰς τὴν πρώτην καὶ οὕτω συνάγομεν τὰ τριπλάσια τῶν τῆς πρώτης, τὰ ὁποῖα γράφομεν εἰς τὴν τρίτην ζώνην.

Ὡσαύτως προσθέτοντες τοὺς ἀριθμοὺς τῆς πρώτης ζώνης μὲ τοὺς τῆς τρίτης συνάγομεν τὴν τετάρτην ζώνην, ἥτις ἐμπεριέχει τὰ τετραπλάσια, ἢ τὰ γινόμενα τῶν 9 ἀριθμῶν ἐπὶ 4 καὶ ἐφεξῆς ἕως τῆς ἐννάτης ζώνης, ἥτις περιέχει τὰ γινόμενα τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης πολυπλασιαζομένων ἐπὶ 9.

46. Ἐξ αὐτοῦ τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ πίνακος γίνεται ἤδη φανερὸς καὶ ὁ τρόπος τῆς χρήσεως αὐτοῦ. Οὕτω ζητοῦμεν τὸν πολυπλασιαστέον εἰς τὴν πρώτην ὁριζόντιον ζώνην καὶ ἀναχωροῦντες ἀπ' αὐτοῦ καταβαίνομεν καθέτως, ἕωσοῦ φθάσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀπέναντι τοῦ πολυπλασιαστοῦ, κειμένου εἰς τὴν πρώτην κάθετον στήλην, καὶ οὗτος εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Π. χ. Ἵνα λάβωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ 5, ἀπὸ τοῦ χαρακτῆρος 8, κειμένου εἰς τὴν πρώτην ὁριζόντιον ζώνην, καταβαίνομεν ἕως τοῦ ἀριθμοῦ 40, κειμένου ἀπέναντι τοῦ πολυπλασιαστοῦ 5 εἰς τὴν πρώτην κάθετον στήλην· καὶ ὁ ἀριθμὸς 40 εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ 5.

Παρατηροῦμεν δὲ περιπλέον, ὅτι τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον 40 εὑρίσκομεν ἐπίσης, καὶ ἂν λάβωμεν τὸν πολυπλασιαστέον 5 ἐπὶ τῆς πρώτης ὁριζοντίου ζώνης, τὸν δὲ πολυπλασιαστέον 8 ἐπὶ τῆς πρώτης καθέτου στήλης. Ἡ παρατήρησις αὕτη εἶναι γενικὴ δι' ὅλους τοὺς ἀριθμούς, ἐφεξῆς δὲ θέλομεν ἐξηγήσει τὸν λόγον τῆς ἰδιότητος ταύτης.

47. Μεταβαίνοντες ἤδη εἰς τὸν πολυπλασιασμὸν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἐν γένει ἀρχόμεθα ἀπὸ τὴν ἁπλουστέραν περίστασιν, καθ' ἣν ὁ μὲν πολυπλασιαστέος ἐκφράζεται διὰ πολλῶν, ὁ δὲ πολυπλασιαστὴς δι' ἑνὸς μόνου χαρακτῆρος.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 459 νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ 6.	459
Κατὰ τὰ ἐν ἀριθ. 25 καὶ 43 πρέπει νὰ γράψωμεν τὸν πο-	459
λυπλασιαστέον 459 εἰς διάταξιν προσθέσεως ἑξάκις καὶ νὰ προσ-	459
θέσωμεν διαδοχικῶς τὰς ἁπλᾶς μονάδας, τὰς δεκάδας καὶ τὰς	459
ἑκατοντάδας τῶν ἴσων τούτων προσθετέων· ὅτε θέλομεν λάβει	459
ἄθροισμα 2754. Οὗτος δὲ θέλει εἶσθαι τὸ ζητούμενον γινόμενον.	459
	2754

Ἀλλ' ἡ διαδοχικὴ αὕτη πρόσθεσις δύναται νὰ συντμηθῇ, ἅμα παρατηρήσωμεν, ὅτι τὸ μερικὸν ἄθροισμα τῶν μονάδων λαμβάνεται καὶ ἀπὸ τοῦ πυθαγορικοῦ πίνακος, καὶ ὁμοίως τὸ τῶν δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων· τούτου ἕνεκα γράφομεν ἅπαξ τὸν πολυπλασιαστέον 459, ὑπ' αὐτὸν δὲ γράφομεν τὸν πολυπλασιαστὴν 6, καὶ ὑπάγοντες γραμμὴν λέγομεν ἑξάκις ὁ 9, ἢ 9 ἐπὶ 6, παράγει 54, τουτέστι 5 δεκάδας καὶ 4 μονάδας γράφομεν τὰς μονάδας ὑπὸ τὴν γραμμήν, τὰς δὲ 5 δεκάδας συνάπτομεν μετὰ τοῦ προσεχοῦς γινομένου τῶν δεκάδων τοῦ πολυπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολυπλασιαστὴν 6.

$$\begin{array}{r} 459 \\ 6 \\ \hline 2754 \end{array}$$

Ὁμοίως προχωροῦντες λέγομεν ἑξάκις ὁ 5 ἢ 5 ἐπὶ 6 παράγει 30, καὶ 5 συνιστῶσι 35 δεκάδας, ἤτοι 5 δεκάδας καὶ 3 ἑκατοντάδας· γράφομεν 5 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων, τὰς δὲ 3 ἑκατοντάδας φυλάττομεν νὰ συνάψωμεν μετὰ τοῦ ἐφεξῆς γινομένου τῶν ἑκατοντάδων.

Καὶ τέλος ἑξάκις ὁ 4 χαρακτὴρ τῶν ἑκατοντάδων, ἢ 4 ἐπὶ 6 ἀποτελεῖ 24 καὶ 3 συνιστῶσιν 27 ἑκατοντάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ἀριστερόθεν τῶν δεκάδων.

Οὕτω λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον 2754.

$$\begin{array}{lr} \text{Ἔστω πρὸς τούτοις ὁ ἀριθμὸς} & 7008 \\ \text{νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ} & 9 \\ \hline & 63072 \end{array}$$

Ὁμοίως καὶ ἐνταῦθα λέγομεν κατὰ πρῶτον 8 ἐπὶ 9 ἀποτελεῖ 72, γράφομεν 2 ὑπὸ τὰς μονάδας, τὰς δὲ 7 δεκάδας πρέπει νὰ συνάψωμεν μετὰ τοῦ γινομένου τῶν δεκάδων. Ἐπειδὴ δὲ ὁ χαρακτὴρ αὐτῶν εἶναι 0 καὶ ἔχομεν 0 ἐπὶ 9 πάλιν 0, διὰ τοῦτο γράφομεν τὰς 7 δεκάδας μόνον, καὶ προχωροῦντες λέγομεν 0 ἑκατοντάδες ἐπὶ 9 δίδει 0, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας καὶ τέλος πάντων 7 ἐπὶ 9 ἀποτελεῖ 63 χιλιάδας τὰς ὁποίας γράφομεν εἰς τὸ γινόμενον. Οὕτω λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν 63072.

48. Ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσις συμπτυσσομένη ὑπάγεται ὑπὸ τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

Ἵνα πολυπλασιάσωμεν ἀριθμὸν συγκείμενον ἐκ πολλῶν χαρακτήρων ἐπὶ πολυπλασιαστὴν ἐκφραζόμενον δι' ἑνὸς χαρακτῆρος, πρέπει νὰ πολυπλασιάσωμεν διαδοχικῶς τὰς μονάδας, τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας κτλ. τοῦ πολυπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολυπλασιαστὴν καὶ νὰ γράψωμεν τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα εἰς τὴν ἀνήκουσαν τάξιν προσέχοντες νὰ γράψωμεν μὲ τὸ ἑξῆς γινόμενον τὰς τῆς ἀνωτέρας τάξεως μονάδας, τὰς προερχομένας ἐκ τοῦ προλαβόντος.

49. Πρὶν θεωρήσωμεν τὴν περίστασιν, καθ' ἣν ὅ τε πολυπλασιαστέος καὶ ὁ πολυπλασιαστὴς σύγκεινται ἐκ πολλῶν χαρακτήρων οἱωνδήποτε, προεισαγωγικῶς ἐκθέτομεν κατὰ πρῶτον πῶς πολυπλασιάζεται οἱοσδήποτε ἀκέραιος πολυπλασιαστέος ἐπὶ πολυπλασιαστὴν, ἐκφραζόμενον δι' ἑνὸς σημαντικοῦ χαρακτῆρος, ἀκολουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 459 νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ 10. Ἐνταῦθα, ἐπειδὴ μέλλει νὰ δεκαπλασιασθῇ ὁ 459, κατὰ τοὺς κανόνας δὲ τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν ἕκαστος χαρακτὴρ αὐτοῦ καὶ ἑπομένως ὅλος ὁ ἀριθμὸς διπλασιάζεται, προστιθεμένου ἑνὸς 0 πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι ἵνα πολυπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν ἐπὶ 10, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν ἓν μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ. Καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον πολυπλασιάζομεν ἐπὶ 100 ἢ 1000 κτλ. γράφοντες δύο ἢ τρία κτλ. μηδενικά. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς 459 ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ. δίδει πολλαπλάσια 4590, 45900, 459000. κτλ.

Ἔστω ἤδη ὁ αὐτὸς 459 νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ 70. Ἐννοοῦντες καὶ ἐνταῦθα τὸν πολυπλασιαστέον 459 γεγραμμένον ἑβδομηκοντάκις εἰς διάταξιν προσθέσεως σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 70 ἰσοῦται μὲ ἑπτάκις 10, καὶ ἐπειδή, εἴτε λάβωμεν τοὺς ἑβδομήκοντα 459 ἀμέσως, εἴτε κατὰ πρῶτον ἀπὸ τμήματα ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ σύγκηται ἐξ ἑπτὰ προσθετέων καὶ μετὰ ταῦτα νὰ συνάψωμεν εἰς ἓν ὅλον τὰ δέκα μερικὰ τούτων ἀθροίσματα, τὸ ἐξαγόμενον εἶναι τὸ αὐτό, πειθόμεθα, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν 70 ἴσων προσθετέων, ἤτοι τὸ γινόμενον τοῦ 459 ἐπὶ 70, εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δέκα μερικῶν ἀθροισμάτων, ἕκαςον ἐξ ἑπτὰ ἴσων προσθετέων, ἢ μὲ τὸ δεκαπλάσιον τοῦ ἑπταπλασίου τοῦ 459. Καὶ ἐπειδὴ ὁ συλλογισμὸς οὗτος εἶναι γενικὸς καὶ διὰ τὰς ἄλλας ὁμοίας περιςάσεις, συμπεραίνομεν ἄρα, ὅτι ἀριθμὸς ἀκέραιος πολυπλασιάζεται ἐπὶ πολυπλασιαςὴν, ἐκφραζόμενον διὰ σημαντικοῦ χαρακτῆρος ἀκολουθουμένου ὑπὸ μηδενικῶν, πολυπλασιαζομένου τοῦ πολυπλασιαστέου τούτου ἐπὶ τὸν σημαντικὸν χαρακτῆρα τοῦ πολυπλασιαστοῦ, καὶ προστιθεμένων δεξιόθεν τοῦ γινομένου τῶν παρακολούθων μηδενικῶν τοῦ πολυπλασιαστοῦ.

50. Μεταβαίνομεν ἤδη εἰς τὴν συνθετωτέραν περίστασιν τοῦ πολυπλασιασμοῦ, καθ' ἣν ὅ τε πολυπλασιαστέος καὶ ὁ πολυπλασιαστὴς σύγκεινται ἐκ πολλῶν χαρακτήρων.

Ἔστω νὰ πολυπλασιασθῇ	87468
Ἐπὶ τὸν	847
Γράφοντες τὸν πολυπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολυπλα-	612276
σιαστέον ἐννοοῦμεν ὡσαύτως τὸν ἀριθμὸν 87468 ὡς εἰς	3498720
διάταξιν προσθέσεως ἐπαναλαμβανόμενον ὀκτακόσια τεσ-	69974400
σαράκοντα καὶ ἑπτάκις, καὶ ὅτι πρέπει ὅλων τούτων νὰ	74085396

ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν. Σκεπτόμενοι δὲ, ὅτι προσθέτοντες αὐτοὺς, εἴτε ὅλους ἀμέσως, εἴτε τμηματικῶς, λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ἐννοοῦμεν πάραυτα, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν 847 ἴσων προσθετέων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τοῦ μὲν ἐξ 7, τοῦ δὲ ἐκ 40, καὶ τοῦ τρίτου ἐξ 800 τοιούτων προσθετέων. Ἢ ἄλλως ὅτι τὸ γινόμενον τῶν 87468 ἐπὶ 847 ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν μερικῶν γινομένων τοῦ πολυπλασιαστέου ἐπὶ 7, ἐπὶ 40 καὶ ἐπὶ 800.

Ἀλλὰ τὸ μὲν γινόμενον τοῦ 87468 ἐπὶ 7 κατὰ τὸν κανόνα (ἀριθ. 48) εἶναι 612276, τὸ δὲ ἐπὶ 40 κατὰ τὴν προηγουμένην ἀνάλυσιν εἶναι 3498720 καὶ τέλος τὸ ἐπὶ 800 κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι 69974400· ἄρα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 74085396 περιέχει ὀκτακόσια τεσσαράκοντα καὶ ἑπτάκις τὸν πολυπλασιαστέον καὶ ἑπομένως εἶναι τὸ καθολικὸν γινόμενον τοῦ 87468 ἐπὶ 847.

Ἐπειδὴ τὰ μηδενικὰ, τὰ γραφόμενα πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν μερικῶν γινομένων τοῦ πολυπλασιαστέου ἐπὶ τὰς δεκάδας, ἑκατοντάδας κτλ. τοῦ πολυπλασιαστοῦ δὲν λαμβάνουσι μέρος εἰς τὸ καθολικὸν ἄθροισμα, διὰ τοῦτο συνήθως παραιτοῦμεν αὐτὰ, γράφομεν δὲ ἕκαστον μερικὸν γινόμενον μίαν θέσιν ἐνδότερον τοῦ πρὸ αὐτοῦ, ἢ δίδομεν εἰς τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα ἑκάστου μερικοῦ γινομένου τὴν αὐτὴν τάξιν, ὁποίαν κατέχει ὁ πολυπλασιάζων χαρακτὴρ τοῦ πολυπλασιαστοῦ.

51. Ἐκ τῆς ἐκτεθείσης ταύτης ἀναλύσεως ἐξάγεται ἤδη ὁ ἑξῆς γενικὸς κανών.

Ἵνα πολυπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐκ πολλῶν χαρακτήρων ἐπὶ πολυπλασιαστὴν συγκείμενον ὁμοίως ἐκ πολλῶν χαρακτήρων, πολυπλασιάζομεν ὅλον τὸν πολυπλασιαστέον ἐφ᾽ ἕκαστον χαρακτῆρα τοῦ πολυπλασιαστοῦ, γράφομεν τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο, ὥστε ὁ τελευταῖος χαρακτὴρ ἑκάστου νὰ κατέχῃ τὴν τάξιν τοῦ πολυπλασιάζοντος χαρακτῆρος τοῦ πολυπλασιαστοῦ· ὑπάγομεν δὲ γραμμὴν καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα. Οὕτω λαμβάνομεν ἄθροισμα τὸ ζητούμενον καθολικὸν γινόμενον.

52. Πολλάκις μεταξὺ τῶν σημαντικῶν χαρακτήρων τοῦ πολυπλασιαστοῦ εἶναι καὶ μηδενικά. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ κανόνος ἔχει χρείαν τινὸς διασαφήσεως, καθόσον ἀφορᾷ τὴν διάταξιν τῶν μερικῶν γινομένων.

Ἔστω π. χ. νὰ πολυπλασιασθῇ	870497
ἐπὶ	500407
	6093479
	3481988
	4352485
	435602792279

πολυπλασιάζοντες κατὰ πρῶτον ἐπὶ τὰς 7 μονάδας λαμβάνομεν γινόμενον 6093479. Ἑπομένως δὲ, μὴ ὑπαρχουσῶν δεκάδων, προχωροῦντες εἰς τὸν πολυπλασιασμὸν ἐπὶ τὰς 4 ἑκατοντάδας τοῦ πολυπλασιαστοῦ λαμβάνομεν γινόμενον 3481988, τὸ ὁποῖον καθὸ ἐκφράζον ἑκατοντάδας, γράφομεν ὑπὸ τὸ πρὸ αὐτοῦ, ἐνδότερον δὲ κατὰ δύο τάξεις πρὸς ἀριστεράν. Παρομοίως διὰ τὴν ἔλλειψιν τῶν χιλιάδων καὶ δεκάδων χιλιάδος εἰς τὸν πολυπλασιαστὴν πολυπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν χαρακτῆρα 5 τῶν ἑκατοντάδων χιλιάδος τοῦ πολυπλασιαστοῦ, τὸ δὲ γινόμενον 4352485 γράφομεν τρεῖς τάξεις ἐνδότερον τοῦ πρὸ αὐτοῦ. Καὶ ἐν γένει ὁσάκις μεταξὺ σημαντικῶν χαρακτήρων τοῦ πολυπλασιαστοῦ εὑρίσκονται ἕν, ἢ περισσότερα μηδενικὰ προχωροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἀμέσου πρὸς ἀριστερὰν τῶν μηδενικῶν χαρακτῆρος, τόσας τάξεις ἐνδότερον τοῦ προτέρου γινομένου, ὅσα εἶναι τὰ παραλειπόμενα μηδενικὰ τοῦ πολυπλασιαστοῦ πλέον μιᾶς. Ἄλλως τε, πρὸς ἀποφυγὴν παντὸς σφάλματος, πληροφορούμεθα περὶ τῆς ἀκριβείας τῆς διατάξεως καὶ ἐκ τοῦ ὅτι ὁ πρῶτος πρὸς τὰ δεξιὰ χαρακτὴρ τοῦ γινομένου πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων τοιαύτης τάξεως, ὁποίας εἶναι ὁ πολυπλασιάζων χαρακτὴρ τοῦ πολυπλασιαστοῦ.

53. Ἂν ὁ εἷς, ἢ ἀμφότεροι οἱ παράγοντες τελευτῶσιν εἰς μηδενικὰ συντέμνομεν τὴν πρᾶξιν πολυπλασιάζοντες, ὡσανεὶ μὴ ὑπῆρχον τὰ μηδενικά. Ἑπομένως δὲ γράφομεν αὐτὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου.

Ἔστω π. χ. νὰ πολυπλασιασθῇ 47000
ἐπὶ 2900

```
   47000
    2900
---------
   423
   94
---------
 136300000
```

Πολυπλασιάζομεν 47 ἐπὶ 29 κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα, εἰς δὲ τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου 1363 γράφομεν τὰ πέντε μηδενικὰ τῶν δύο παραγόντων

Ὁ λόγος εἶναι ὅτι ἂν ἐπρόκειτο νὰ πολυπλασιάσωμεν 47000 ἐπὶ μόνον 29, φανερὸν ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 29 ἔπρεπε νὰ ἐκφράζῃ χιλιάδας, καὶ ἑπομένως ἔπρεπε νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τρία μηδενικά. Ἀλλ' ἐπειδὴ πρόκειται νὰ πολυπλασιάσωμεν ἐπὶ 2900, τοῦτο δὲ σημαίνει νὰ λάβωμεν ἑκατοντάκις τὸ γινόμενον τὸ ἐπὶ 29· διὰ τοῦτο πρέπει νὰ γράψωμεν ἕτερα δύο μηδενικά. Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ἔχει χώραν καὶ εἰς ὅλας τὰς ὁμοίας περιστάσεις.

§. ε. Ἰδιότητες τινὲς τοῦ Πολυπλασιασμοῦ.

54. Τὰ ἑξῆς θεωρήματα τοῦ πολυπλασιασμοῦ ἐξηγοῦσιν οὐσιώδεις τινὰς ἰδιότητας αὐτοῦ, τῶν ὁποίων τὴν χρῆσιν ἀπαντῶμεν συχνότατα εἰς τὰς ἐφαρμογάς.

Παρετηρήσαμεν εἰς τὸν ἀριθ. 49, ὅτι ὅταν ὁ πολυπλασιαστὴς ἦναι σημαντικός τις χαρακτὴρ ἀκολουθούμενος ὑπὸ μηδενικῶν, τότε ὁ δεδομένος πολυπλασιαστέος πολυπλασιάζεται ἐπὶ τὸν σημαντικὸν χαρακτῆρα τοῦ πολυπλασιαστοῦ, εἰς δὲ τὸ γινόμενον προσαρτῶνται ἐν τῷ τέλει τὰ παρακολουθοῦντα μηδενικά. Ἐνταῦθα θέλομεν ἀποδείξει ὅτι ἡ παρατήρησις αὕτη εἶναι μερική τις περίστασις γενικωτέρας ἀρχῆς, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ἐκφωνήσωμεν ὡς ἑξῆς.

Ἀριθμός τις πολυπλασιάζεται ἐπὶ πολυπλασιαστὴν, ὄντα γινόμενον δύο παραγόντων διττῶς, εἴτε πολυπλασιαζομένου τοῦ πολυπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολυπλασιαστὴν, ὡς ἐδόθη· εἴτε πολυπλασιαζομένου πρότερον ἐπὶ τὸν ἕνα καὶ ἔπειτα ἐπὶ τὸν ἕτερον παράγοντα τοῦ πολυπλασιαστοῦ.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 527 νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν 462. Ἐπειδὴ ὁ 462 εἶναι γινόμενον τοῦ 14 ἐπὶ 33, λέγομεν ὅτι τὸ αὐτὸ γινόμενον 243474 τοῦ 527 ἐπὶ 462 λαμβάνομεν ἀδιαφόρως καὶ ἂν πολυπλασιάσωμεν τὸν 527 πρότερον ἐπὶ 14, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν 7378 ἐπὶ τὸν ἕτερον παράγοντα 33 ὡς δείκνυται εἰς τὸν πίνακα.

527	527	527
462	14	33
1054	2108	1581
3162	527	1581
2108	7378	17391
243474	33	14
	22134	69564
	22134	17391
	243474	243474

Ὁ λόγος τῆς ἰδιότητος ταύτης εἶναι ὁ αὐτὸς, τὸν ὁποῖον ἐπανελάβομεν πολλάκις. Τῷ ὄντι ἐπειδὴ ὁ πολυπλασιασμὸς τοῦ 527 ἐπὶ 462 σημαίνει τὴν διαδοχικὴν πρόσθεσιν τοῦ 527 τετρακόσια ἑξήκοντα καὶ δὶς, οἱ δὲ 462 ἴσοι ἀριθμοὶ σχηματίζουσι προφανῶς 14 τμήματα ἐκ 33 προσθετέων, ἢ 33 τμήματα ἐκ 14, δυνάμεθα διὰ τοῦτο νὰ λάβωμεν διττῶς τὸ ἄθροισμα τῶν 462 ἴσων προσθετέων, ἢ τὸ γινόμενον τοῦ 527 ἐπὶ τὸν 462. εἴτε προσθέτοντες τοὺς προσθετέους τούτους ὅλους ταὐτοχρόνως, καὶ τοῦτο σημαίνει ὁ πολυπλασιασμὸς τοῦ 527 ἐπὶ 462, εἴτε προσθέτοντες ἀνὰ τμήματα ἴσα ἐκ 14 ἢ 33 προσθετέων, καὶ τοῦτο ἀναφέρεται εἰς τὸν πολυπλασιασμὸν ἐφ' ἑκάτερον τῶν παραγόντων.

55. Ἡ πρότασις αὕτη ἐμπερικλείει πρὸς τούτοις τὰς ἑξῆς δύο συνεπείας.

ά. Εἰς τὸν πολυπλασιασμὸν τριῶν ἀριθμῶν πρὸς ἀλλήλους δυνάμεθα νὰ ἀντιστρέψωμεν τὴν τάξιν τῶν δύο τελευταίων παραγόντων ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ὅπου εἶναι ἀδιάφορον νὰ πολυπλασιάσωμεν πρότερον ἐπὶ 14 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 33, ἢ τὸ ἀνάπαλιν. Ἐπειδὴ ὁ αὐτὸς λόγος τῆς τμηματικῆς προσθέσεως, ἢ μᾶλλον τῆς ἀναλύσεως τοῦ πολυπλασιαστοῦ ὑπαγορεύει ἀμφοτέρους τοὺς τρόπους.

β'. Ἐπειδὴ πάλιν ὁ ἀριθμὸς 14 εἶναι γινόμενον τῶν παραγόντων 2 καὶ 7, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 527 ἐπὶ 14 εἶναι τὸ αὐτὸ, ὁποῖον καὶ τοῦ 527 ἐπὶ 2 καὶ 7. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ ὡς πρὸς τὸν ἕτερον παράγοντα 33, ὄντα γινόμενον τοῦ 3 καὶ 11.

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης ἕπεται ἡ ἀρχὴ, ὅτι ἀριθμός τις πολυπλασιάζεται ἐπὶ πολυπλασιαστὴν, ὄντα γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων, ὅταν ὁ ἀριθμὸς οὗτος πολυπλασιασθῇ διαδοχικῶς ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ πολυπλασιαστοῦ.

56. Συχνάκις λαμβάνομεν χρείαν εἰς τὰς ἐφαρμογὰς νὰ πολυπλασιάσωμεν διαδοχικῶς πολλοὺς ἀριθμοὺς πρὸς ἀλλήλους. Οὕτω π. χ. τοὺς ἀριθμοὺς 23, 35, 72, 49 καὶ 156 εἰλημμένους ὡς ἔτυχε, πρόκειται νὰ πολυπλασιάσωμεν καθ' ἣν εὑρίσκονται τάξιν. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ πολυπλασιάσωμεν κατὰ πρῶτον τὸν 23 ἐπὶ 35 τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ 72 καὶ τὸ δεύτερον γινόμενον ἐπὶ 49 καὶ τέλος τὸ τρίτον γινόμενον ἐπὶ 156. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ τελικὸν ἐξαγόμενον κατὰ πολλοὺς τρόπους μεταβάλλοντες τὴν τάξιν τῶν διαδοχικῶν πολυπλασιασμῶν. Τοῦτο δὲ ἐννοοῦμεν λέγοντες, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ πολυπλασιασμοῦ πολλῶν ἀριθμῶν πρὸς ἀλλήλους εἶναι τὸ αὐτὸ καθ' οἱανδήποτε τάξιν ἐκτελέσωμεν τοὺς πολυπλασιασμούς.

Ἵνα δώσωμεν λόγον τῆς ἰδιότητος ταύτης ἥτις ἔχει πολλὴν σημασίαν εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν, θεωροῦμεν κατὰ πρῶτον τὴν περίστασιν δύο παραγόντων π. χ. τοῦ 459 καὶ 237.

Δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν τὸν ἀριθμὸν	1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
459 ὡς σύνολον τοσούτων μονάδων καθ'	1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
ὁριζόντιον στίχον, καὶ ὅτι ἔχομεν 237 τοι-	1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
ούτους στίχους. Φανερὸν, ὅτι τὸ ἄθροισμα	. . . .
τῶν ἐν τῷ πινακίῳ μονάδων ἰσοῦται μὲ	. . . .

τοσάκις τὰς 459 μονάδας τοῦ πρώτου στίχου, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες μιᾶς τῶν καθέτων στηλῶν, τουτέστι 237· τὸ ἄθροισμα δὲ τοῦτο ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 459 ἐπὶ 237. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ἐπίσης, ὅτι τὸ αὐτὸ τοῦτο ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ τοσάκις τὰς 237 μονάδας τῆς καθέτου στήλης, ὁσάκις ἐμπεριέχεται ἡ μονὰς εἰς ἕνα τῶν ὁριζοντίων στίχων, τουτέστι τετρακόσια πεντήκοντα καὶ ἐννεάκις, ἡ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 237 ἐπὶ 459, ἄρα τὸ γινόμενον τοῦ 459 ἐπὶ 237, τὸ ὁποῖον ἐλάβομεν διὰ τῆς προτέρας ἀριθμήσεως, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 237 ἐπὶ 459, τὸ ὁποῖον ἐλάβομεν διὰ τῆς δευτέρας. Καὶ ἐπειδὴ ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ἐφαρμόζεται καὶ εἰς δύο ἄλλους οἱουσδήποτε ἀριθμούς, ἄρα καθ' οἱανδήποτε τάξιν λάβομεν τοὺς παράγοντας τὸ γινόμενον εἶναι τὸ αὐτό.

57. Μεταβαίνομεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου δι' ὅσους δήποτε παράγοντας. Πρὸς τοῦτο ἐπαναλαμβάνομεν τοὺς ἀνωτέρω ἀριθμοὺς 23, 35, 72, 49 καὶ 156. Κατὰ τὴν ἐν ἀριθμῷ 55 πρώτην συνέπειαν, εἶναι φανερόν, ὅτι εἰς τοὺς διαδοχικοὺς πολυπλασιασμοὺς δυνάμεθα νὰ διαβιβάσωμεν τὸν παράγοντα 156 εἰς τὴν θέσιν τοῦ 49. Διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον δυνάμεθα νὰ διαβιβάσωμεν αὐτὸν καὶ εἰς τὴν θέσιν τοῦ 72 καὶ ὁμοίως εἰς τὴν τοῦ 35 καὶ τέλος εἰς τὴν τοῦ 23, ἢ ὅτι ὁ παράγων 156, δύναται νὰ καθέξῃ ὅλας τὰς θέσεις εἰς τὸν πολυπλασιασμόν. Ἀλλὰ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ παράγων 49, μετατεθεὶς ἤδη ὡς τελευταῖος ἀντὶ τοῦ 156, δύναται νὰ προηγηθῇ τοῦ 72, καὶ ὁμοίως τοῦ 35 κτλ. Καὶ ὁμοίως καὶ οἱ ἄλλοι παράγοντες. Ἕπεται ἄρα, ὅτι ἕκαστος τῶν παραγόντων δύναται νὰ καθέξῃ ὅλας τὰς θέσεις εἰς τοὺς μερικοὺς πολυπλασιασμούς, τὸ δὲ γινόμενον μένει πάντοτε τὸ αὐτό, ἄρα καθ' ὁποιανδήποτε τάξιν λάβωμεν τοὺς παράγοντας, τὸ γινόμενον δὲν μεταβάλλεται.

§. ς΄. Περὶ Διαιρέσεως.

58. Ὡς παρετηρήσαμεν εἰς τὸ Δ΄. ζήτημα τοῦ ἀριθ. 25, νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' ἄλλου, ἐννοοῦμεν νὰ εὕρωμεν τρίτον ἀριθμὸν ὅστις πολυπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον νὰ παράγῃ τὸν πρῶτον· ἢ μᾶλλον δοθέντος τοῦ γινομένου καὶ ἑνὸς τῶν παραγόντων, νὰ εὕρωμεν τὸν ἕτερον παράγοντα. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸν πολυπλασιασμὸν τῶν ἀκεραίων, τὸ γινόμενον σχηματίζεται ἐκ τοῦ πολυπλασιαστέου λαμβανομένου τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολυπλασιαστής, δυνάμεθα διὰ τοῦτο νὰ εἴπωμεν πρὸς τούτοις, ὅτι νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν δι' ἀκεραίου, σημαίνει νὰ εὕρωμεν ποσάκις ὁ πρῶτος ἀριθμός, θεωρούμενος ὡς γινόμενον, ἐμπεριέχει τὸν δεύτερον θεωρούμενον ὡς πολυπλασιαστέον· ὁ ἀριθμὸς δὲ ὁ ἐκφράζων τὴν σχέσιν ταύτην εἶναι ὁ ζητούμενος πολυπλασιαστής.

Τέλος, ἐκλαμβανομένου τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ὡς τοῦ πολυπλασιαστοῦ, ἐπειδὴ ὁ πρῶτος θεωρούμενος ὡς γινόμενον σχηματίζεται ἐκ τοῦ ἀγνώστου πολυπλασιαστέου, ὡς ὁ πολυπλασιαστὴς σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος, ἕπεται ἄρα, ὅτι ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων συνίσταται ἐκ τοσούτων ἴσων μερῶν, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος· ὥστε νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν δι' ἀκεραίου, ἐννοοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἓν τῶν ἴσων τούτων μερῶν τοῦ πρώτου ἢ νὰ μερίσωμεν τὸν πρῶτον εἰς τόσα ἴσα μέρη ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος.

Οἱ δύο τελευταῖοι ὁρισμοί, ὑπὸ τοὺς ὁποίους θεωροῦμεν ἐνίοτε τὴν διαίρεσιν, ἀνήκουσι μόνον εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, ἐν ᾧ ὁ πρῶτος ἐκφωνούμενος καὶ κατὰ τὴν διττήν, ὡς ἀνωτέρω, ἔκφρασιν, ἐφαρμόζεται εἰς ὅλους ἐν γένει, ἀκεραίους καὶ κλασματικούς. Ἐντοσούτω τὰ ὀνόματα τῶν ὅρων τῆς διαιρέσεως ἀπεδόθησαν, ὡς ὑπὸ τὴν μερικὴν ταύτην ἔποψιν θεωρουμένης τῆς πράξεως. Οὕτως ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμὸς καλεῖται διαιρετέος, ὁ δὲ δεύτερος διαιρέτης, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως καλεῖται πηλίκον, καθὸ ἐμφαῖνον ποσάκις ὁ δεύτερος ἐμπεριέχεται εἰς τὸν πρῶτον.

59. Ἐξ αὐτῶν τῶν ὁρισμῶν τῆς διαιρέσεως προκύπτει ἤδη, ὅτι ἡ πρᾶξις αὕτη εἶναι ἀντίστροφος τοῦ πολυπλασιασμοῦ καὶ ἑπομένως ἡ μία χρησιμεύει ὡς βάσανος τῆς ἑτέρας· τουτέστιν εὑρεθέντος τοῦ πηλίκου πολυπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον· καὶ τὸ ἀνάπαλιν, εὑρεθέντος τοῦ γινομένου, διαιροῦμεν αὐτὸ δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων, τοῦ πολυπλασιαστέου ἢ τοῦ πολυπλασιαστοῦ, καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸν ἕτερον παράγοντα. Οὕτω δὲ ἐπιδεβαιοῦται ἡ ἀκρίβεια τοῦ ἐξαγομένου ἢ τὸ ἀλάνθαστον τοῦ γινομένου ὑπολογισμοῦ.

60. Πρὶν μεταβῶμεν εἰς τὴν θεωρίαν τῆς διαιρέσεως, παρατηροῦμεν περιπλέον, ὅτι καθὼς εἰς τὸν πολυπλασιασμὸν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ πολυπλασιαστέου, ὁμοίως καὶ ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πηλίκον διὰ τῆς διαδοχικῆς ἀφαιρέσεως τοῦ διαιρέτου.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 60 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 12. Φανερὸν, ὅτι ὁσάκις ὁ 12 δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 60, τοσάκις ὁ 60 ἐμπεριέχει τὸν 12. Οὕτω λοιπὸν τὸ πηλίκον ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πραττομένων ἀφαιρέσεων ἕως οὗ ἐξαντληθῇ ὁ διαιρετέος καὶ εἰς τοῦτο μὲν τὸ παράδειγμα ὑποχρεούμεθα εἰς πέντε ἀφαιρέσεις καὶ ἑπομένως τὸ πηλίκον εἶναι 5. Ἀλλ' εἰς ἄλλα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ διαιρετέος εἶναι πολὺς σχετικῶς πρὸς τὸν διαιρετέον, ἡ πρᾶξις αὕτη ἀποβαίνει λίαν μακρὰ καὶ ἐπίπονος καὶ ὡς ἐκ τούτου ἀδύνατος εἰς τὰς ἐφαρμογάς. Ἐζητήθη διὰ τοῦτο ἰδιαιτέρα καὶ βραχυτέρα μέθοδος διὰ τῆς ὁποίας νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πηλίκον, καὶ εἰς τοῦτο ἀφορᾷ ἡ κυρίως λεγομένη διαίρεσις.

	60
ά	48
β'	36
γ'	24
δ'	12
έ	0

61. Ὅταν ὁ μὲν διαιρετέος δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ δεκαπλοῦν τοῦ διαιρέτου, ὡς δυνάμεθα νὰ γνωρίσωμεν ἐκ πρώτης ἀφετηρίας τῶν ἀριθμῶν, ὁ δὲ διαιρέτης ἐκφράζεται δι' ἑνὸς χαρακτῆρος, τότε εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον διὰ

τοῦ πυθαγορικοῦ πίνακος, ἢ μᾶλλον ἀναπολοῦμεν αὐτὸ ἀμέσως· π. χ. 35 διαιρούμενος διὰ 7 δίδει 5, ἢ εἰς τὸν 35 ὁ 7 εἰσέρχεται πεντάκις, ἐπειδὴ 5 ἐπὶ 7 παράγει 35. Λέγομεν πρὸς τούτοις τὸ ἕβδομον τοῦ 35 εἶναι 5, ἐπειδὴ ἑπτάκις ὁ 5 δίδει 35.

Ἀλλ' ὑπάρχουσιν ἀριθμοί, ὡς φαίνεται εἰς τὸν αὐτὸν πίνακα, οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι ἀκριβῶς δι' ἄλλων διαιρετοί· π. χ. ἡ ἑβδόμη ζώνη, ἡ περιέχουσα τὰ ἑπταπλάσια, δὲν ἐμπεριέχει τὸν ἀριθμὸν 40, ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 7, ἐπειδὴ ὅμως ὁ 40 ἐμπερικλείεται μεταξὺ τοῦ 35 καὶ 42, βλέπομεν ὅτι τὸ μεγαλήτερον πολυπλάσιον τοῦ 7, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐμπεριληφθῇ εἰς αὐτόν, εἶναι τὸ γινόμενον 35 τῶν παραγόντων 7 καὶ 5· ὅθεν τοῦτο ἐννοοῦμεν λέγοντες, ὅτι τὸ ἕβδομον τοῦ 40 εἶναι 5 μὲ ὑπόλοιπον 5, καὶ ὁμοίως τὸ ἔννατον τοῦ 57 εἶναι 6 μὲ ὑπόλοιπον 3 κτλ.

Διὰ τῶν στοιχειωδῶν τούτων διαιρέσεων καὶ τῶν ἑξῆς ἐκτεθησομένων σκέψεων θέλομεν δυνηθῆ νὰ ἐκτελέσωμεν οἱανδήποτε διαίρεσιν.

62. Ἐρευνῶντες κατὰ πρῶτον τὴν ἁπλουστέραν περίστασιν, καθ' ἣν ὁ μὲν διαιρετέος ἐκφράζεται διὰ πολλῶν, ὁ δὲ διαιρέτης δι' ἑνὸς χαρακτῆρος, παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ τὸν ὑπάρχοντα σύνδεσμον μεταξὺ τοῦ πολυπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως ἡ ἀνάλυσις ἀπαιτεῖ νὰ ἀνατρέξωμεν εἰς τὰς συσταθείσας ἀρχὰς ἐπὶ τῆς μεθόδου τοῦ πολυπλασιασμοῦ, ἐκ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ ὁδηγηθῶμεν εἰς τὴν ἀνακάλυψιν καὶ τῆς ζητουμένης μεθόδου τῆς διαιρέσεως. Πρὸς τοῦτο ἐπαναλαμβάνομεν τὸ παράδειγμα τοῦ ἀριθμοῦ 47. Ἕπεται ἐξ αὐτοῦ τοῦ πολυπλασιασμοῦ ὅτι τὸ γινόμενον 2754 σχηματίζεται ἀπὸ τρία μερικὰ γινόμενα, τουτέστιν ἀπὸ τὸ ἑξαπλάσιον τῶν μονάδων καὶ ὁμοίως τῶν δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ 459. Ὅθεν, ἂν δυνηθῶμεν νὰ ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, τοὐλάχιστον νοερῶς, εἰς τὰ τρία ταῦτα μερικὰ γινόμενα, φανερὸν ὅτι, λαμβάνοντες τότε τὸ ἕκτον ἑκάστου μερικοῦ γινομένου, προσδιορίζομεν ὡς πηλίκα τοὺς τρεῖς χαρακτῆρας τοῦ πολυπλασιαστέου 459, ἤτοι τὸν ζητούμενον ἄγνωστον παράγοντα.

$$\begin{array}{r} 459 \\ 6 \\ \hline 2754 \end{array}$$

63. Τούτου τεθέντος, ἰδοὺ πῶς σκεπτόμεθα ἐπὶ προκειμένης ἀναλύσεως. Ἐπειδὴ αἱ ἑκατοντάδες τοῦ πολυπλασιαστέου ἢ τοῦ ζητουμένου πηλίκου, πολυπλασιασθεῖσαι ἐπὶ τὸν νῦν διαιρέτην 6 παρήγαγον γινόμενον ἑκατοντάδας, ἄρα τὸ μερικὸν τοῦτο γινόμενον εὑρίσκεται ἐντὸς τῶν 27 ἑκατοντάδων τοῦ διαιρετέου· ὅθεν λέγομεν ὁ 6 εἰς τὸν 27 εἰσέρχεται τετράκις, ἢ μᾶλλον τὸ ἕκτον τοῦ 27 εἶναι 4· ἑπομένως 4 εἶναι ὁ χαρακτὴρ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην, πολυπλασιάζοντες δὲ αὐτὸν ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον 24 ἀπὸ

$$\begin{array}{r|l} 2754 & 6 \\ \hline 35 & 459 \\ 54 & \\ 0 & \end{array}$$

τοῦ 27 λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 3 ἑκατοντάδας, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ θεωρήσωμεν ὡς προελθούσας ἀπὸ τὸ δεύτερον μερικὸν γινόμενον τὸ τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην.

Πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καταβιβάζοντες τὸν προσεχῆ χαρακτῆρα 5 τῶν δεκάδων τοῦ διαιρετέου λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν 35 δεκάδας, δεύτερον μερικὸν διαιρετέον, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ θεωρήσωμεν παρομοίως ὡς ἐμπεριέχοντα τὸ μερικὸν γινόμενον τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην. Ὅθεν λέγομεν ὡσαύτως τὸ ἕκτον τοῦ 35 εἶναι 5 καὶ γράφομεν 5 δεκάδας πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος χαρακτῆρος 4 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου· πολυπλασιάζοντες δὲ τὰς 5 δεκάδας ἐπὶ τὸν 6 καὶ τὸ γινόμενον 30 ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ 35 λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 5 δεκάδας, τὰς ὁποίας ἑρμηνεύομεν ὡς προελθούσας ἀπὸ τὸν πολυπλασιασμὸν τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην.

Τέλος καταβιβάζοντες καὶ τὸν χαρακτῆρα 4 τῶν μονάδων τοῦ διαιρετέου λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν 54 μονάδας ἁπλᾶς, ὅστις πρέπει νὰ ἦναι τὸ γινόμενον τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην. Ὅθεν διαιροῦντες τὸν 54 διὰ τοῦ 6 λαμβάνομεν πηλίκον 9, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς ἁπλᾶς μονάδας τοῦ πηλίκου. Καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ 6, ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 54, δίδει ὑπόλοιπον 0, ἕπεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς 459 εἶναι τὸ ὅλον ζητούμενον πηλίκον.

Τῷ ὄντι, ἀφαιρέσαντες διαδοχικῶς ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 2754 τὰ ἑξαπλάσια τῶν 4 ἑκατοντάδων, τῶν 5 δεκάδων καὶ τῶν 9 μονάδων καὶ εὑρόντες ὑπόλοιπον 0, ἀπεδείξαμεν δι' ὅλων αὐτῶν τῶν πράξεων, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 2754 ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 459 ἐπὶ 6 καὶ ἐπομένως ὁ 459 εἶναι ὁ ἕτερος παράγων.

64. Ἔστω πρὸς τούτοις 54264 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 8. Ἐνταῦθα παρουσιάζεται ἡ δυσκολία νὰ προσδιορίσωμεν κατὰ πρῶτον ἐκ πόσων χαρακτήρων συνίσταται τὸ πηλίκον, ἢ ὁποίας τάξεως εἶναι αἱ ἀνώτεραι μονάδες αὐτοῦ. Μετὰ τοῦτο δὲ εἶναι εὔκολον νὰ ἐπαναλάβωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὴν ἀνωτέρω ἀνάλυσιν.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι ἂν ὁ πρῶτος πρὸς τ' ἀριστερὰ χαρακτὴρ τοῦ διαιρετέου ἦτο μεγαλήτερος, ἢ ἴσος μὲ τὸν διαιρέτην, τότε φανερὸν, ὅτι καὶ τὸ πηλίκον ἔπρεπε νὰ ἔχῃ μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως μὲ τὰς τοῦ χαρακτῆρος τούτου. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ παρὸν παράδειγμα ὁ πρῶτος χαρακτὴρ 5 εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου 8, συμπεραίνομεν ἐκ τούτου, ὅτι αἱ ἀνώτεραι μονάδες τοῦ πηλίκου πρέπει νὰ ἦναι τῆς τάξεως τοῦ δευτέρου πρὸς ἀριστερὰν χαρακτῆρος τοῦ διαιρετέου. Ὅθεν λαμβάνοντες τοὺς δύο πρώτους χαρακτῆρας, ἀποτελοῦντας 54 χιλιάδας, λέγομεν, τὸ ὄγδοον τοῦ 54 εἶναι 6 διὰ τὸν 48 καὶ ἐπομένως τὸ πηλίκον ἔχει 6 χιλιάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην. Πολυπλασιάζοντες δὲ καὶ ἀφαιροῦντες λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 6 χιλιάδας, τὰς ὁποίας ὡς καὶ ἀνωτέρω, ἑρμηνεύομεν ὡς προερχομένας ἐκ τοῦ γινομένου τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην. Ἐξακολουθοῦντες δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὴν πρᾶξιν εὑρίσκομεν πηλίκον 6783.

```
54264 | 8
      |-----
 62   | 6783
  66  |    8
   24 |-----
    0 |54264
```

Καὶ τῷ ὄντι 6783 ἐπὶ 8 δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον 54264.

65. Ὅταν διὰ τῆς ἀσκήσεως οἰκειωθῶμεν μὲ τοὺς μικροὺς ὑπολογισμούς, δυνάμεθα, καθόσον ἀφορᾷ τὴν ἁπλῆν ταύτην περίστασιν, καὶ νὰ συντέμνωμεν τὴν πρᾶξιν ὑποκρύπτοντες τὰ λαμβανόμενα ὑπόλοιπα καὶ σχηματίζοντες νοερῶς τοὺς μερικοὺς διαιρετέους.

Ἔστω π. χ. νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 6 ὁ ἀριθμὸς 285432. Ὑπάγοντες γραμμὴν ὑπὸ τὸν διαιρετέον, λέγομεν· τὸ ἕκτον τοῦ 28 εἶναι 4, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν 28, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 4 συνάπτομεν νοερῶς μετὰ τοῦ ἑπομένου χαρακτῆρος 5 καὶ λαμβάνομεν 45. Οὕτω λέγομεν τὸ ἕκτον τῶν 45 εἶναι 7, τὸ ὁποῖον γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 4, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 3 συνάπτομεν μετὰ τῶν 4 ἑκατοντάδων τοῦ διαιρετέου καὶ ἐννοοῦμεν τὸν νέον μερικὸν διαιρετέον 34. Καὶ πάλιν τὸ ἕκτον τοῦ 34 εἶναι 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 7, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 4 ἑνοῦμεν μετὰ τοῦ ἐφεξῆς χαρακτῆρος 3 τῶν δεκάδων τοῦ διαιρετέου· οὕτω δὲ λαμβάνομεν τὸ ἕκτον τῶν 43 δεκάδων καὶ τὸ πηλίκον 7 γράφομεν εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκάδων, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 1 συναπτόμενον τέλος μετὰ τῶν μονάδων δίδει 12 μονάδας ἁπλᾶς, τὸ ἕκτον τῶν ὁποίων εἶναι 2. Ὅθεν τὸ ὅλον πηλίκον εἶναι 47572.

```
285432 | 6
------------
 47572 — 0
     6
------------
285432
```

Καὶ τῷ ὄντι, πολυπλασιαζομένου τοῦ πηλίκου τούτου ἐπὶ τὸν διαιρέτην 6, παράγεται γινόμενον αὐτὸς ὁ διαιρετέος.

66. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ὄγδοον τοῦ 9725647 εἶναι 1215705 μὲ ὑπόλοιπον 7 ὡς φαίνεται εἰς τὸν πίνακα.

```
          9725647 | 8
          -----------
          1215705  —7
                8
          -----------
Βάσανος.— 9725647
```

Σημειοῦμεν δὲ εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο οὐσιώδη παρατήρησιν. Ἐπειδὴ φθάσαντες εἰς τὸν χαρακτῆρα 7 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου δὲν λαμβάνομεν ὑπόλοιπον, ὁ δὲ ἑξῆς χαρακτὴρ 4 τοῦ διαιρετέου εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου 8, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ πηλίκον δὲν ἔχει δεκάδας· διὰ τοῦτο γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου, τὰς δὲ 4 δεκάδας συνάπτομεν μετὰ τῶν 7 μονάδων τοῦ διαιρέτου. Οὕτω δὲ προχωροῦντες διαιροῦμεν τὸν 47 διὰ τοῦ 8, λαμβάνομεν πηλίκον 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 0, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 7 γράφομεν πέραν τοῦ πηλίκου· περὶ τῆς σημασίας δὲ τούτου ἐφεξῆς θέλομεν κάμει ἰδιαίτερον λόγον.

67. Μεταβαίνομεν ἤδη εἰς τὴν περίστασιν, καθ' ἣν ὅ τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης συντίθενται ἐκ πολλῶν χαρακτήρων· ἵνα ὁδηγηθῶμεν δὲ εἰς τὰς σκέψεις ἡμῶν ἀναλυτικῶς ἀπὸ τὰς συσταθείσας ἀρχὰς τοῦ πολυπλασιασμοῦ, λαμβάνομεν γνωστόν τι γινόμενον π. χ. τὸ τῶν 654 καὶ 432 καὶ ἐπιχειροῦμεν μετὰ ταῦτα τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ εἰς τοὺς ἰδίους παράγοντας, ὡς ἂν ἐπρόκειτο νὰ ἐπιβεβαιώσωμεν τὴν ἀκρίβειαν τοῦ ἐξαγομένου.

Ἐξ αὐτῆς τῆς πράξεως εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ γινόμενον 282528 τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς διαιρετέον, συντίθεται ἐκ τῶν τριῶν μερικῶν γινομένων τοῦ πολυπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τῶν τριῶν χαρακτήρων τοῦ πολυπλασιαστοῦ. Ὅθεν, ἂν γνωρίζοντες τὸν πολυπλασιαστέον ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸν πολυπλασιαστὴν, πρῶτον ἔργον ἡμῶν εἶναι νὰ ἀναλύσωμεν τὸν διαιρετέον εἰς τὰ τρία ταῦτα μέρη. Διότι τότε διαιροῦντες ἕκαστον τούτων διὰ τοῦ δεδομένου παράγοντος 654 λαμβάνομεν τοὺς τρεῖς χαρακτῆρας τοῦ ἀγνώστου πολυπλασιαστοῦ. Ἡ ἀνάλυσις αὕτη ἐκ πρώτης ὄψεως δὲν εἶναι μὲν τόσον εὐχερὴς διὰ τὰς κατὰ τὴν πρόσθεσιν γενομένας ἀναγωγάς· ἀλλ' ἰδοὺ πῶς σκεπτόμενοι φθάνομεν εἰς τὸ αὐτὸ τέλος.

```
   654
   432
------
  1308
 1962
2616
------
282528
```

68. Ἐπειδὴ τὸ μερικὸν γινόμενον τοῦ 654 ἐπὶ τὸν χαρακτῆρα τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου ἐκφράζει ἑκατοντάδας, καὶ ἑπομένως προστεθὲν μετὰ τῶν ἄλλων γινομένων ἐμπεριελήφθη εἰς τὰς 2825 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου, ἄρα ἂν ζητήσωμεν τὸ μερικὸν πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 2825 διὰ τοῦ δεδομένου διαιρέτου 654 ἢ ποσάκις ὁ 654 εἰσέρχεται εἰς τὸν 2825, ὁ χαρακτὴρ οὗτος θέλει εἶσθαι ὁ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου.

```
282528 | 654
2616   |-----
-----  | 432
 20928
 1962
 -----
  1308
  1308
  ----
     0
```

Ὅτι δὲ ὁ χαρακτὴρ οὗτος δὲν ηὐξήθη, οὐδ' ἠλαττώθη ἕνεκα τῆς συγχωνεύσεως τῶν τριῶν γινομένων ἀλλ' εἶναι αὐτὸς οὗτος τὸν ὁποῖον ἔχομεν καὶ εἰς τὸν πολυπλασιασμὸν, πληροφορούμεθα διὰ τοῦ ἑξῆς συλλογισμοῦ.

Ὁ χαρακτὴρ οὗτος τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου δὲν εἶναι μεγαλήτερος τοῦ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πολυπλασιαστοῦ. Διότι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν 654, εἶναι μικρότερον τῶν 2825 ἑκατοντάδων τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦτο μαρτυρεῖ, ὅτι τὸ πηλίκον ἰσοῦται τοὐλάχιστον μὲ τοσάκις ἑκατὸν, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ χαρακτῆρος τούτου· ἀλλὰ δὲν εἶναι οὔτε μικρότερος τοῦ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πολυπλασιαστοῦ. Διότι ὁ ἀμέσως κατὰ μονάδα ἀνώτερος αὐτοῦ, πολυπλασιαζόμενος ἐπὶ 654 παράγει γινόμενον μεγαλήτερον τοῦ 2825, τοὐλάχιστον 2826, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ· ἄρα αὐτὸς εἶναι ὁ χαρακτὴρ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου.

Τούτου τεθέντος, δυνάμεθα μὲν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν χαρακτῆρα τοῦτον, εἴτε ἀφαιροῦντες διαδοχικῶς τὸν διαιρέτην 654 ἀπὸ τῶν 2825 ἑκατοντάδων τοῦ διαιρετέου, εἴτε ἀποπειρώμενοι τὸν πολυπλασιασμὸν τοῦ διαιρέτου 654 ἐπὶ 1, 2, 3, μέχρις 9 τὸ πολύ. Ἀλλ᾽ ἀναχωροῦντες παρομοίως ἀπ᾽ αὐτὰς τὰς ἀρχὰς τοῦ πολυπλασιασμοῦ εὑρίσκομεν συντομώτερον τρόπον. Ἐπειδὴ κατὰ τὸν κανόνα (ἀριθ. 48) ὁ πολυπλασιαστὴς, ὁ ἐκφραζόμενος δι᾽ ἑνὸς χαρακτῆρος, πολυπλασιάζει ἕνα ἕκαστον χαρακτῆρα τοῦ πολυπλασιαστέου ἰδίως· ἐκ τούτου καὶ ὁ ζητούμενος χαρακτὴρ ἐπολυπλασίασε διαδοχικῶς ἕκαστον χαρακτῆρα τοῦ διαιρέτου 654, καὶ τὰ μὲν γινόμενα τῶν 4 μονάδων καὶ τῶν 5 δεκάδων αὐτοῦ δὲν εἶναι γνωστὸν ὁποίαν ἀληθῶς κατέλαβον θέσιν εἰς τὸ ὅλον ἐξαγόμενον, ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῶν 6 ἑκατοντάδων ἐμπεριελήφθη ἀκέραιον ἐντὸς τῶν δύο πρώτων χαρακτήρων τοῦ διαιρετέου, τουτέστιν ἐντὸς τοῦ 28. Ὅθεν ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν 2825 διὰ τοῦ 654 καὶ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον πολυπλασιαστὴν ἢ τὰς ἑκατοντάδας τοῦ πηλίκου, διαιροῦμεν μᾶλλον τὸν 28 διὰ τοῦ 6 καὶ εὑρίσκομεν τὸν αὐτὸν παράγοντα. Οὕτω λαμβάνομεν ὡς ἔγγιστα πηλίκον 4, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς ἑκατοντάδας τοῦ ὅλου πηλίκου.

Προσδιορίσαντες τὰς ἑκατοντάδας, λαμβάνομεν ἤδη τὸ μερικὸν γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν διαιρέτην, τουτέστι 2616· καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τῶν 2825 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 209 ἑκατοντάδας· πλησίον αὐτοῦ καταβιβάζομεν καὶ τοὺς δύο ἑξῆς χαρακτῆρας 2 καὶ 8 τοῦ διαιρετέου. Οὕτως ἔχομεν διὰ νέον διαιρετέον 20928, ἀριθμὸν συνιστάμενον ἐκ τῶν δύο ἄλλων μερικῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὰς δεκάδας καὶ μονάδας τοῦ πηλίκου.

Ἵνα λάβωμεν τὰς δεκάδας τοῦ πηλίκου, συλλογιζόμεθα καὶ αὖθις ὡς ἀνωτέρω. Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης 654, πολυπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν χαρακτῆρα τῶν δεκάδων ἔδωκε δεκάδας, διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον τοῦτο ἐμπεριέχεται ἀκέραιον ἐντὸς τῶν 2092 δεκάδων τοῦ νέου διαιρετέου· ἐπομένως ζητοῦμεν ποσάκις ὁ διαιρέτης εἰσέρχεται εἰς τὸν 2092, ἢ μᾶλλον ποσάκις ὁ 6 εἰσέρχεται εἰς τὸν 20· ἐπειδὴ ἐντὸς τοῦ 20 ἐμπεριέχεται μερικώτερον γινόμενον τοῦ ἀνωτέρω χαρακτῆρος 6 τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὰς δεκάδας τοῦ πηλίκου. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν πηλίκον 3 δεκάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ παρευρεθέντος χαρακτῆρος 4 τῶν ἑκατοντάδων.

Πολυπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην 654 ἐπὶ 3 καὶ τὸ γινόμενον 1962 ἀφαιροῦντες ἀπὸ 2092 λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 130 δεκάδας, αἱ ὁποῖαι προῆλθον ἀπὸ τὸν πολυπλασιασμὸν τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πηλίκου.

Τέλος καταβιβάζοντες καὶ τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα 8 σχηματίζομεν τὸν τρίτον μερικὸν διαιρετέον 1308, ὅστις εἶναι αὐτὸ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πηλίκου. Ζητοῦντες διὰ τοῦτο ποσάκις ὁ 654 εἰσέρχεται εἰς τὸν 1308, ἢ μᾶλλον ποσάκις ὁ 6 εἰσέρχεται εἰς τὸν 13, εὑρίσκομεν πηλίκον 2 μονάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην· πολυπλασιάζοντες δὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ 2 καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸν διαιρετέον 1308 λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 0. Οὕτως εὑρίσκομεν τέλος πάντων τὸ ὅλον πηλίκον 432.

Ἐξ αὐτῶν τῶν πράξεων γίνεται ἤδη φανερὸν, ὅτι ὁ εὑρεθεὶς οὗτος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἄγνωστος παράγων. Διότι μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν τριῶν μερικῶν γινομένων τοῦ 654 ἐπὶ τὰς 4 ἑκατοντάδας 3 δεκάδας καὶ 2 μονάδας ἐξαντληθέντος τοῦ διαιρετέου, συνάγεται ὅτι ὁ διαιρετέος συνίσταται ἐκ μόνων τῶν τριῶν τούτων μερικῶν γινομένων, ἢ ὅτι εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 654 ἐπὶ 432, τὸ ὁποῖον ἄλλως τε δυνάμεθα νὰ ἐπικυρώσωμεν καὶ διὰ τοῦ πολυπλασιασμοῦ.

69. Ἔστωσαν ἤδη διαιρετέος μὲν ὁ 5125886, διαιρέτης δὲ ὁ 876, τοὺς ὁποίους ἐλάβομεν ὡς ἔτυχε.

Ἐνταῦθα παρουσιάζεται ἡ δυσκολία νὰ προσδιορίσωμεν κατὰ πρῶτον ὁποίας τάξεως εἶναι αἱ ἀνώτεραι μονάδες τοῦ πηλίκου, ἢ ἐκ πόσων χαρακτήρων συνίσταται τὸ πηλίκον· ὁ προσδιορισμὸς δὲ ἔπειτα ἑκάστου χαρακτῆρος συνάγεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως.

5125886	876
4380	5851
7458	
7008	
4508	
4380	
1286	
876	
410	

Ἀλλ' εἶναι φανερὸν, ὅτι ἂν λαμβανομένων πρὸς ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσων χαρακτήρων, ὅσους ἔχει ὁ διαιρέτης, τουτέστι τριῶν, ὁ ἐκ τούτων σχηματιζόμενος ἀριθμὸς 512 ἐμπεριεῖχε τὸν διαιρέτην, τὸ ζητούμενον πηλίκον ἔπρεπε νὰ ἔχῃ μονάδας τῆς τάξεως ταύτης. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ προκείμενον παράδειγμα ὁ 512 εἶναι μικρότερος τοῦ 876, ἄρα τὸ πηλίκον δὲν ἔχει δεκάδας χιλιάδος, καὶ περιορίζεται ἕως ἁπλῶν χιλιάδων· πρέπει δὲ νὰ ἔχῃ τοὐλάχιστον μίαν χιλιάδα. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ 876 ἐπὶ 1000, ἤτοι 876000 εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Οὕτως ἐμάθομεν ἤδη ὅτι τὸ πηλίκον συνίσταται ἐκ τεσσάρων χαρακτήρων, τουτέστιν ἐκ χιλιάδων, ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ μονάδων.

Ἵνα προσδιορίσωμεν ἤδη τοὺς χαρακτῆρας τούτους, συλλογιζόμεθα ὡς καὶ ἀνωτέρω. Ἐπειδὴ αἱ χιλιάδες τοῦ πηλίκου, πολυπλασιασθεῖσαι ἐπὶ τὸν διαιρέτην, παρήγαγον χιλιάδας, ἄρα τὸ γινόμενον αὐτῶν εὑρίσκεται ἀκέραιον ἐντὸς τῶν χιλιάδων τοῦ διαιρετέου. Ὅθεν ζητοῦμεν ποσάκις ὁ 876 εἰσέρχεται εἰς τὸν 5125, ἢ μᾶλλον ποσάκις ὁ 8 εἰσέρχεται εἰς τὸν 51 καὶ εὑρίσκομεν 6. Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τοῦτο εἶναι ἀνώτερον τοῦ δέοντος, ἐπειδὴ πολυπλασιαζόμενον ἐπὶ τὰς 7 δεκάδας τοῦ διαιρέτου παράγει γινόμενον 42, τὸ ὁποῖον χορηγεῖ 4 ἑκατοντάδας εἰς τὸ ἐφεξῆς γινόμενον 48 τοῦ 8 ἐπὶ 6· ὥστε σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 52 ἀνώτερος τοῦ 51 καὶ δὲν δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ· γράφομεν διὰ τοῦτο 5 ὡς χαρακτῆρα τῶν χιλιάδων τοῦ πηλίκου.

Πολυπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην 876 ἐπὶ 5 καὶ τὸ γινόμενον 4380 χιλιάδας ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῶν 5125 χιλιάδων τοῦ διαιρετέου· εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον 745 καταβιβάζομεν μόνον τὸν ἐφεξῆς χαρακτῆρα 8 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ διαιρετέου· διότι ἐντὸς τῶν 7458 ἑκατοντάδων ἐμπεριέχεται τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὰς ἑκατοντάδας τοῦ πηλίκου. Διαιροῦμεν παρομοίως τὸν μερικὸν διαιρετέον 7458 διὰ τοῦ διαιρέτου, ἢ μᾶλλον τοὺς δύο πρώτους χαρακτῆρας 74 διὰ τοῦ 8, πρώτου χαρακτῆρος τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 9· ἀλλ' ὄντος τούτου ἀνωτέρου τοῦ δέοντος, γράφομεν 8 ἑκατοντάδας εἰς τὸ πηλίκον· πολυπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον 8 καὶ τὸ γινόμενον 7008 ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου, λαβάνομεν ὑπόλοιπον 450.

Ὁμοίως συλλογιζόμενοι προχωροῦμεν καὶ εἰς τὰς ἑξῆς πράξεις· καταβιβάζομεν τὸν χαρακτῆρα 8 τῶν δεκάδων τοῦ διαιρετέου καὶ σχηματίζομεν τὸν τρίτον μερικὸν διαιρετέον 4508, διαιροῦντες δὲ διὰ τοῦ διαιρέτου, ἢ μᾶλλον τὸν 45 διὰ τοῦ 8, εὑρίσκομεν σύμφωνον πηλίκον 5, ἐπὶ τὸ ὁποῖον πολυπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 128 δεκάδας.

Καταβιβάζομεν τέλος καὶ τὰς 6 μονάδας τοῦ διαιρετέου καὶ σχηματίζομεν τὸν τέταρτον μερικὸν διαιρετέον 1286. Διαιροῦντες δὲ εὑρίσκομεν πηλίκον 1 διὰ τὰς μονάδας τοῦ πηλίκου καὶ ὑπόλοιπον 410.

Ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου ὑπολοίπου συμπεραίνομεν, ὅτι ὁ δεδομένος διαιρετέος δὲν ἐμπεριέχει ὁλοσχερῶς τὸν διαιρέτην, ἢ ὅτι ὁ ἀριθμὸς 5125886 δὲν εἶναι τέλειον γινόμενον τοῦ δεδομένου διαιρέτου 876 καὶ ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ· ἐμπεριλαμβάνεται δὲ μεταξὺ τῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου 876 ἐπὶ 5851 καὶ 5852. Ἐπιβεβαιοῦμεν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον πολυπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτοντες καὶ τὸ ὑπόλοιπον· οὕτως εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον τὸν διαιρετέον.

```
   5851
    876
 ------
  35106
 40957
46808
    410
-------
5125886
```

70. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω παρατήρησιν προσδιορίζομεν ἕκαστον χαρακτῆρα τοῦ πηλίκου διαιροῦντες τὸν ἕνα ἢ τοὺς δύο πρώτους χαρακτῆρας τοῦ μερικοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τοῦ διαιρέτου. Συμβαίνει ὅμως πολλάκις, ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ὅτι ἡ μερικὴ αὕτη διαίρεσις δίδει χαρακτῆρα ἀνώτερον τοῦ δέοντος· ὥστε ὑποχρεούμεθα εἰς ἀποπείρας, μᾶλλον ἢ ἧττον μακρὰς κατὰ τὴν περίστασιν, καὶ τότε μόνον πληροφορούμεθα περὶ τῆς ἀκριβείας χαρακτῆρός τινος, ὅταν δυνηθῶμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπ' αὐτὸν τὸν χαρακτῆρα.

Ὑπάρχει ὅμως μέσον, διὰ τοῦ ὁποίου πληροφορούμεθα ἀμέσως, ἂν ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος χαρακτὴρ ἦναι ὁ ζητούμενος εἰς τὸ πηλίκον καὶ χωρὶς νὰ ἐπιχειρήσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἀφαίρεσιν. Τὸ μέσον τοῦτο στηρίζεται εἰς τὸν ἑξῆς συλλογισμόν. Ἐπειδὴ πᾶς μερικὸς διαιρετέος θεωρεῖται ὡς γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ χαρακτῆρός τινος τοῦ πηλίκου, πρέπει, διαιροῦντες νοερῶς, ὡς εἰς τὸν ἀριθμὸν 65 καὶ 66, τὸν μερικὸν διαιρετέον διὰ τοῦ δοκιμαζομένου χαρακτῆρος, νὰ εὕρωμεν διαδοχικῶς ὅλους τοὺς χαρακτῆρας τοῦ διαιρέτου. Ἂν δὲ συμβῇ νὰ εὑρεθῇ διὰ τῆς διαιρέσεως ταύτης χαρακτὴρ μικρότερος τοῦ ἀνταποκρινομένου εἰς τὸν διαιρέτην, σημεῖον τότε, ὅτι ὁ δοκιμαζόμενος χαρακτὴρ εἶναι ἀνώτερος τοῦ ζητουμένου εἰς τὸ ὅλον πηλίκον. Ὅθεν ἐλαττοῦμεν αὐτὸν κατὰ μονάδα καὶ πράττομεν ἐπὶ τοῦ νέου τούτου ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ προλαβόντος.

Ἔστω π. χ. νὰ διαιρέσωμεν 137836 διὰ τοῦ 1583. Ἐνταῦθα ὁ πρῶτος μερικὸς διαιρετέος εἶναι 13783· ὅθεν πρέπει νὰ εἴπωμεν· εἰς τὸν 13 ποσάκις ὁ πρῶτος χαρακτὴρ 1 τοῦ διαιρέτου; εἰσέρχεται μὲν 13, ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ πηλίκον δὲν πρέπει νὰ ἦναι ἀνώτερον τοῦ 9, δοκιμάζομεν διὰ τοῦτο διὰ τοῦ 9· ὅθεν λέγομεν

```
137836 | 1583
12664  | 87
-----
 11196
 11081
 -----
   115
```

13 διὰ τοῦ 9 δίδει πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 4· συνάπτοντες τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο μετὰ τοῦ προσεχοῦς χαρακτῆρος 7 τοῦ διαιρετέου ἐννοοῦμεν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 47, ὅστις διαιρούμενος διὰ τοῦ 9 δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2. Προχωροῦντες λέγομεν παρομοίως 2 μετὰ

τοῦ ἑξῆς χαρακτῆρος 8 δίδει διαιρετέον 28, ὅστις διαιρούμενος διὰ τοῦ 9, δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 1. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπειδὴ τὸ πηλίκον 3 εἶναι μικρότερον τοῦ τρίτου χαρακτῆρος 8 τοῦ διαιρέτου, φανερὸν, ὅτι ὁ 9 δὲν εἶναι ὁ χαρακτὴρ τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου, ἀλλ' ἀνώτερος αὐτοῦ· διότι τὸ ἔννατον τοῦ 13783 εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου 1583 καὶ ἐπομένως ὁ ἀριθμὸς 13783 εἶναι μικρότερος τοῦ γινομένου τοῦ 1583 ἐπὶ 9. Δοκιμάζοντες διὰ τοῦτο τὸν 8 λέγομεν· τὸ ὄγδοον τοῦ 13 εἶναι 1 μὲ ὑπόλοιπον 5, τὸ ὄγδοον τοῦ 57 εἶναι 7 ἀριθμὸς μεγαλήτερος τοῦ δευτέρου χαρακτῆρος 5 τοῦ διαιρέτου. Ὅθεν βεβαιούμεθα, ὅτι ὁ 8 ἁρμόζει εἰς τὰς δεκάδας τοῦ πηλίκου. Καὶ τῷ ὄντι ὁ δεδομένος διαιρέτης, ὢν μικρότερος τοῦ ὀγδόου τοῦ διαιρετέου, λαμβανόμενος ὀκτάκις δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου.

Πολυπλασιάζοντες ἤδη 1583 ἐπὶ 8 καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον 12664 ἀπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 13783 λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 1119 καὶ δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 11196, ἐπὶ τοῦ ὁποίου σκεπτόμεθα ὡς καὶ ἀνωτέρω. Οὕτω λέγομεν ὁ πρῶτος χαρακτὴρ 1 τοῦ διαιρέτου εἰσέρχεται μὲν εἰς τὸν 11 ἑνδεκάκις, ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν δύναται νὰ ἦναι τὸ πολὺ, εἰμὴ 9, οὗτος δὲ δὲν συμβιβάζεται ὡσαύτως, διότι ὁ νέος διαιρετέος 11196 εἶναι μικρότερος τοῦ προτέρου 13783, εἰς τὸν ὁποῖον ὁ 9 εὑρέθη ἀνώτερος τοῦ δέοντος, δοκιμάζομεν διὰ τοῦτο διὰ τοῦ 8· ὅθεν 11 διὰ τοῦ 8 δίδει πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 3· καὶ ἐπειδὴ ὁ ἐφεξῆς σχηματιζόμενος ἀριθμὸς 31 διαιρούμενος διὰ τοῦ 8 δίδει πηλίκον 3 μικρότερον τοῦ δευτέρου χαρακτῆρος τοῦ διαιρέτου, συμπεραίνομεν ἐκ τούτου, ὅτι καὶ ὁ 8 εἶναι ὡσαύτως ἀνώτερος τοῦ ζητουμένου· δοκιμάζομεν διὰ τοῦτο τὸν 7 καὶ περαίνοντες τὴν πρᾶξιν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 115 μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

71. Μετὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν ἀνάλυσιν δυνάμεθα νὰ συστήσωμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως.

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν δι' ἀκεραίου, γράφομεν τὸν διαιρέτην πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, χωρίζοντες αὐτοὺς διὰ καθέτου γραμμῆς, καὶ ὑπάγομεν ὁριζόντιον γραμμὴν ὑπὸ τὸν διαιρέτην. Ἐπομένως λαμβάνομεν τοσούτους χαρακτῆρας πρὸς ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου, ὅσους ἔχει ὁ διαιρέτης, ἢ ἕνα περισσότερον, ὅταν τὸ σύνολον τῶν πρώτων ἀποτελῇ ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ διαιρέτου· διαιροῦμεν τὸν ἕνα ἢ τοὺς δύο πρώτους χαρακτῆρας τοῦ μερικοῦ τούτου διαιρετέου διὰ τοῦ πρὸς ἀριστερὰ πρώτου χαρακτῆρος τοῦ διαιρέτου, καὶ εὑρίσκομεν τὸν χαρακτῆρα τῶν ἀνωτέρω μονάδων τοῦ πηλίκου. Ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦτο πολυπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ χωρισθέντος διαιρετέου. Εἰς τὸ ὑπόλοιπον καταβιβάζομεν καὶ τὸν ἑξῆς χαρακτῆρα τοῦ δεδομένου διαιρετέου καὶ σχηματίζομεν νέον μερικὸν διαιρετέον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐργαζόμεθα ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἐφεξῆς χαρακτῆρα τοῦ πηλίκου. Οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦμεν πολυπλασιάζοντες, ἀφαιροῦντες, καταβιβάζοντες χαρακτῆρας καὶ διαιροῦντες, ἕωσοῦ καταβιβασθῶσιν ὅλοι οἱ χαρακτῆρες τοῦ διαιρετέου καὶ ἐκτελεσθῇ ἡ τελευταία αὕτη μερικὴ διαίρεσις. Οὕτω τὸ σύνολον τῶν μερικῶν πηλίκων συγκροτεῖ τὸ ὅλον πηλίκον τῆς διαιρέσεως.

72. Οἰκειούμενοι μὲ τὸν εἰρημένον κανόνα δυνάμεθα νὰ συντέμνωμεν τὴν πρᾶξιν πράττοντες ταὐτοχρόνως τοὺς μερικοὺς πολυπλασιασμοὺς καὶ ἀφαιρέσεις, ὡς ἐπὶ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος.

```
1755 | 39
 195 | 45
  00
```

Ἐνταῦθα προσδιορίσαντες τὸ πρῶτον μερικὸν πηλίκον 4, πολυπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ κατὰ πρῶτον τὰς 9 μονάδας τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ γινόμενον 36 ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 45 ἀριθμοῦ, ὅστις σχηματίζεται ἀπὸ τὰς 5 μονάδας τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 175, αὐξανομένας κατὰ 4 δεκάδας, τὰς ὁποίας δανειζόμεθα ἀπὸ τὰς πρὸ αὐτῶν 17 δεκάδας. Οὕτω λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 9. Εἰς δὲ τὸ ἑξῆς γινόμενον 12 τοῦ χαρακτῆρος 3 τῶν δεκάδων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον 4, προσθέτομεν καὶ 4 προσληφθείσας δεκάδας, καὶ τὸ ὅλον 16 ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 17 καὶ λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 1, τὸ ὁποῖον ἠθέλομεν λάβει ἐπίσης, καὶ ἂν ἠθέλαμεν ἀφαιρέσει τὸν 12 ἀπὸ τοῦ 17 ἠλαττωμένου κατὰ 4 ἤτοι ἀπὸ 13.

Ὁμοίως πράττομεν καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου 195. Οὕτω λέγομεν 9 ἐπὶ 5 δίδει 45, τὸ ὁποῖον ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 45 δίδει ὑπόλοιπον 0 μονάδας· καὶ 3 ἐπὶ 5 δίδει γινόμενον 15, τὸ ὁποῖον αὐξανόμενον κατὰ τὰς 4 δεκάδας δίδει 19, ἀφαιρούμενον δὲ ἀπὸ τοῦ 19 δίδει ὑπόλοιπον 0 δεκάδας.

```
200658969 | 39837
   147396 | 5037
   278859
        0
```

73. Ἐπὶ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος ἐκθέτομεν οὐσιώδη παρατήρησιν. Εὑρόντες κατὰ πρῶτον τὰς 5 χιλιάδας τοῦ πηλίκου καὶ ὑπόλοιπον 1473 κατεβιβάσαμεν παρ' αὐτῷ τὸν ἑξῆς χαρακτῆρα 9, καὶ οὕτως ἐσχηματίσαμεν τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 14739· ὅθεν ἔπρεπε νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ νὰ εὕρωμεν τὸν ἑξῆς χαρακτῆρα τοῦ ὅλου πηλίκου. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ μερικὸς οὗτος διαιρετέος, ὢν μικρότερος τοῦ διαιρέτου, δὲν δύναται νὰ ἐμπεριλάβῃ οὐδ' ἅπαξ τὸν διαιρέτην, φανερὸν ὅτι τὸ πηλίκον δὲν ἔχει μονάδας τῆς τάξεως ταύτης· διὰ τοῦτο ἐγράψαμεν 0 εἰς τὸ πηλίκον εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων· θεωρήσαντες δὲ τὸν ἀριθμὸν 14739 ὡς ἓν τῶν λαμβανομένων μερικῶν ὑπολοίπων προέβημεν εἰς τὴν πρᾶξιν, καταβιβάσαντες τὸν ἑξῆς

χαρακτῆρα 6 τοῦ διαιρετέου· ὅθεν ἐλάβομεν πηλίκον 3 δεκάδας, ἐφεξῆς δὲ τὰς μονάδας.

Ἡ σκέψις αὕτη εἶναι γενικὴ δι' ὅλας τὰς ὁμοίας περιστάσεις, καὶ διὰ τοῦτο λέγομεν, ἂν εἰς ὑπόλοιπόν τι καταβιβάσωμεν τὸν ἑξῆς χαρακτῆρα, καὶ ὁ σχηματισθησόμενος ἀριθμὸς ἦναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τότε εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ πηλίκον δὲν ἔχει μονάδας ἐκείνης τῆς τάξεως· καταβιβάζοντες δὲ τὸν ἑξῆς χαρακτῆρα προβαίνομεν εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς ἀμέσου μερικῆς διαιρέσεως· ἂν δὲ καὶ αὖθις συμβῇ τὸ αὐτὸ, σκεπτόμενοι παρομοίως ἀναπληροῦμεν διὰ μηδενικῶν τὰς ἐλλειπούσας ταύτας τάξεις τοῦ πηλίκου.

74. Ἡ βάσανος τοῦ πολυπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως γίνονται ἀμοιβαίως. Οὕτως εἰς μὲν τὸν πολυπλασιασμὸν διαιροῦμεν τὸ γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν ἕτερον παράγοντα ἄνευ ὑπολοίπου, εἰς δὲ τὴν διαίρεσιν πολυπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον, προσθέτομεν δὲ καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ἂν ὑπάρχῃ, καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον.

§. ζ΄. Περὶ τῶν ὑπολοίπων τῆς διαιρέσεως.

75. Ἀναλύοντες τὰ ἑξῆς ἁπλούστατα ζητήματα προτιθέμεθα νὰ ἐξηγήσωμεν, πῶς πρέπει νὰ μεταχειριζώμεθα τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως, ὁσάκις ἐφαρμόζομεν τὴν πρᾶξιν πρὸς ἐπίλυσιν ζητήματος, ἀναφερομένου εἰς συγκεκριμένους ἀριθμούς.

Ζήτημα Α΄.—Ἡ ἐκτύπωσις ἑνὸς τυπογραφικοῦ φύλλου τιμᾶται Δραχ. 38. Ζητεῖται πόσα τυπογραφικὰ φύλλα ἐκτυποῦνται διὰ δραχ. 1435;

Ἀνάλυσις.—Ἐπειδὴ δι' ἕκαστον φύλλον, πρέπει νὰ πληρωθῶσι 38 δραχ. ἄρα ὁσάκις ὁ 38 ἐμπεριέχεται εἰς τὸν 1435, τόσα εἶναι τὰ ἐκτυπούμενα φύλλα.

Ἐκ τούτου διαιροῦντες τὸν 1435 διὰ τοῦ 38 λαμβάνομεν διὰ πηλίκον τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν φύλλων.

Λύσις.		Βάσανος.
1435	38	38
295	37	37
29		266
		114
		29
		1435

Διὰ τῆς ἀνωτέρω πράξεως εὕρομεν ὡς ἔγγιστα πηλίκον 37 καὶ ὑπόλοιπον 29· τοῦ τελευταίου τούτου τὴν χρῆσιν ἑρμηνεύομεν ὡς ἕπεται.

Ἂν ὁ διαιρέτης ἦτο 1406, τουτέστι κατὰ 29 μονάδας κατώτερος τοῦ δεδομένου, καὶ ἐπομένως τὸ ἀκριβὲς γινόμενον τοῦ 38 ἐπὶ 37, τότε ὁ διαιρέτης, εἰσερχόμενος ὁλοσχερῶς εἰς τὸν διαιρετέον, ἤθελε παράξει ἀκριβὲς πηλίκον 37, τοῦτο δὲ ἤθελεν εἶσθαι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν τυπογραφικῶν φύλλων. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὸν διαιρετέον, ἐκτὸς τοῦ γινομένου τούτου, ἐμπεριέχονται καὶ ἕτεραι δραχ. 29, πρέπει νὰ αὐξήσωμεν καὶ τὸ πηλίκον 37 οὐχὶ μὲν κατὰ μονάδα, διότι ὁ 29 εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου 38, ὅσον τιμᾶται τὸ φύλλον, ἀλλὰ κατά τι μέρος, ἤτοι κλάσμα τοῦ φύλλου ἀνάλογον τοῦ ὑπολοίπου 29. Ἰδοὺ πῶς προσδιορίζομεν τὸ κλάσμα τοῦτο.

Ἂν ἀντὶ τῶν 29 δραχμῶν ἤθελεν ὑπολειφθῇ μία μόνον, τότε, ἐπειδὴ τὸ φύλλον τιμᾶται δραχμῶν 38, φανερὸν ὅτι εἰς ἑκάστην δραχμὴν ἀναφέρεται τὸ $\frac{1}{38}$ τοῦ φύλλου· κατ' εὐθὺν δὲ λόγον εἰς τὰς 2 δραχμὰς ἀναφέρονται τὰ $\frac{2}{38}$ καὶ ὁμοίως εἰς τὰς 3 τὰ $\frac{3}{38}$ κτλ. ὥστε εἰς τὰς 29 ἀναλογεῖ τὸ κλάσμα $\frac{29}{38}$ (ἴδ. ἀριθ. 19 καὶ 20).

Τοιαύτη εἶναι ἐν γένει ἡ χρῆσις τῶν ὑπολοίπων τῆς διαιρέσεως, ἐφαρμοζομένης εἰς συγκεκριμένους ἀριθμούς· δηλαδὴ ἐννοοῦμεν τὴν μονάδα (τῆς ὁποίας τὸ εἶδος προσδιορίζεται κατὰ τὴν πρότασιν τοῦ ζητήματος) διῃρημένην εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης, λαμβάνομεν ἓν τῶν μερῶν τούτων τοσάκις, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ ὑπολοίπου, τὸ οὕτω δὲ ἀπαρτιζόμενον κλάσμα προστιθέμενον συμπληροῖ τὸ προευρεθὲν ὡς ἔγγιστα πηλίκον.

Ζήτημα Β'.—Διὰ 895 πήχεις ὑφάσματος ἐπληρώσαμεν δραχ. 21478. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως.

Ἀνάλυσις. Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως, λαμβανομένη ὀκτακόσια ἐννενήκοντα καὶ πεντάκις, πρέπει νὰ παράξῃ τὸν ἀριθμὸν 21478, ἄρα διὰ τῆς διαιρέσεως εὑρίσκομεν τὸν ἄγνωστον τοῦτον πολυπλασιαστέον.

Λύσις.		Βάσανος.
21478	895	895
3578	23 $\frac{893}{895}$	23
893		2685
		1790
		893
		21478

Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ διαιρετέος ἐκτὸς τοῦ γινομένου τοῦ 895 ἐπὶ 23 ἐμπεριέχει πρὸς τούτοις 893 δραχμάς· ἐπομένως ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως εἶναι ἀνωτέρα τῶν 23 δραχμῶν κατά τι κλάσμα τῆς δραχμῆς, τὸ ὁποῖον, ὡς καὶ ἀνωτέρω, προσδιορίζομεν εὐκόλως. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι ὡς τὸ $\frac{1}{895}$ ἐπαναλαμβανόμενον ὀκτακόσια ἐννενήκοντα καὶ πεντάκις παράγει τὴν μονάδα, ὡσαύτως καὶ τὸ $\frac{893}{895}$, λαμβανόμενον ἐπίσης, παράγει τὸν 893.

Ἐκ τούτου 23 πλέον τοῦ κλάσματος $\frac{893}{895}$ εἶναι ἀριθμὸς, ὅστις πολυπλασιαζόμενος ἐπὶ 895 παράγει τὸν διαιρετέον 21478 καὶ ἑπομένως ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ πήχεως εἶναι 23 δραχ. καὶ $\frac{893}{895}$ τῆς δραχμῆς. Τὸ ἐξαγόμενον δὲ τοῦτο συμφωνεῖ καὶ μὲ τὸ τοῦ ἀνωτέρω ζητήματος τελικὸν συμπέρασμα περὶ τῆς χρήσεως τοῦ ὑπολοίπου.

Ζήτημα Γ΄.—Εἰς 498 συνεταίρους πρόκειται νὰ διανείμωμεν κέρδος ἐκ δραχμῶν 1348708. Ζητεῖται νὰ προδιορίσωμεν τὸ μέρος ἑκάστου.

Λύσις.		Βάσανος.
1348708	498	2708
3527	$2708\frac{124}{498}$	498
4108		21664
124		24372
		10832
		124
		1348708

Ἡ πρώτη ἰδέα, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν περὶ τοῦ 124 εἶναι, ὅτι πρέπει καὶ τοῦτο, θεωρούμενον ὡς ἓν, νὰ διαιρεθῇ ἐπίσης εἰς 498 μέρη, ὡς διαιρεῖται ἡ μονὰς, ἓν δὲ τῶν μερῶν τούτων νὰ χρησιμεύσῃ εἰς συμπλήρωσιν τοῦ πηλίκου. Ἀλλ᾽εἶναι ἁπλούστερον νὰ ἐννοήσωμεν μᾶλλον τὴν μονάδα, ἤτοι τὴν δραχμὴν, διαιρουμένην εἰς 498 μέρη ἴσα, τουτέστι τετρακοσιοστὰ ἐννενηκοστὰ ὄγδοα, καὶ ὅτι ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν 124· ἐπειδὴ τοσαῦται εἶναι καὶ αἱ δραχμαὶ τοῦ ὑπολοίπου. Οὕτω κατὰ τὰς αὐτὰς ἀρχὰς τῶν ἀριθ. 19 καὶ 20 σχηματίζομεν τὸ κλάσμα $\frac{124}{498}$, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ προευρεθὲν ὡς ἔγγιστα πηλίκον.

76. Τὸ τελευταῖον τοῦτο παράδειγμα δίδει ἀφορμὴν εἰς τὴν οὐσιώδη παρατήρησιν, ὅτι εἴτε διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 124 εἰς 498 ἴσα μέρη, εἴτε διαιρέσωμεν τὴν μονάδα τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἓν ἐξ αὐτῶν, τὸ τετρακοσιοστὸν ἐννενηκοστὸν ὄγδοον, λάβωμεν ἑκατὸν εἴκοσι καὶ τετράκις, κατ᾽ ἀμφοτέρους τοὺς τρόπους λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον. Τῷ ὄντι, ἂν ἀντὶ τῶν 124 δραχμῶν, εἴχομεν νὰ διαιρέσωμεν μίαν μόνον εἰς 498 μέρη ἴσα, ἕκαστον μέρος ἤθελεν εἶσθαι $\frac{1}{498}$· ἐπειδὴ δὲ ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι ἑκατὸν εἴκοσι καὶ τετράκις μεγαλήτερος, ἄρα τοσάκις μεγαλήτερον πρέπει νὰ ἦναι καὶ τὸ μέρος αὐτοῦ, τουτέστιν ἑκατὸν εἴκοσι καὶ τετράκις τὸ $\frac{1}{498}$ ἤτοι $\frac{124}{498}$.

Ὁμοίως νὰ διαιρέσωμεν τὸν 15 εἰς 28 ἴσα μέρη, σημαίνει νὰ λάβωμεν πέντε καὶ δεκάκις τὸ εἰκοστὸν ὄγδοον τῆς μονάδος κτλ. Καὶ ἐν γένει, εἴτε ἀριθμός τις διαιρεθῇ εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει τις ἕτερος, εἴτε διαιρεθῇ ἡ μονὰς τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἴσων μερῶν, καὶ ἓν τῶν μερῶν τούτων ἐπαναληφθῇ, ὁσάκις ἡ μονὰς ἐμπεριέχεται εἰς τὸν μεριστέον, τὸ ἐξαγόμενον προσδιορίζεται τὸ αὐτό.

Ἐκρίναμεν ἀναγκαῖον νὰ διασαφηνίσωμεν εὐκρινέστερον τὴν ἰδιότητα ταύτην. Διότι εἰς τὴν ἐφεξῆς ἀνάλυσιν θέλομεν λάβει χρείαν νὰ θεωρήσωμεν τὰ κλάσματα ὑπὸ τὴν διπλῆν ταύτην ἔποψιν τοῦ σχηματισμοῦ αὐτῶν.

§. ή. Ἀρχαί τινες ἐπὶ τοῦ πολυπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως.

77. Πρὶν τελειώσωμεν τὸ κεφάλαιον τοῦτο, ἐξηγοῦμεν καὶ τὰς ἑξῆς ἰδιότητας τοῦ πολυπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως, τῶν ὁποίων τὴν χρῆσιν ἀπαντῶμεν συχνότατα εἰς τὴν Ἀριθμητικήν.

Α΄. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολυπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμός τις καθίσταται τοσάκις μεγαλήτερος, ἢ λαμβάνεται τοσοῦτόν τι μέρος αὐτοῦ, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἕτερος· π. χ. τὸ γινόμενον τοῦ 24 ἐπὶ 6 εἶναι ἀριθμὸς ἑξάκις μεγαλήτερος τοῦ 24, καθὸ ἄθροισμα ἐξ ἴσων ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι 24. Καὶ ἀντιστρόφως τὸ πηλίκον τοῦ 144 διὰ τοῦ 6 εἶναι ὑποεξαπλάσιον αὐτοῦ, καθότι λαμβανόμενον ἑξάκις ἀποτελεῖ τὸν 144.

Τούτου τεθέντος, πολυπλασιάζοντες, ἢ διαιροῦντες ἕνα τῶν παραγόντων, τὸν πολυπλατιαστέον ἢ τὸν πολυπλασιαστὴν δι᾽ ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ πολυπλασιάζομεν ἢ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ ἰδίου· καὶ κατὰ μὲν πρῶτον ὡς πρὸς τὸν πολυπλασιαστήν.

Ὑποτεθείσθω ὅτι ἀντὶ νὰ πολυπλασιάσωμεν 47 ἐπὶ 6, πολυπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 24 ἀριθμὸν τετράκις μεγαλήτερον τοῦ 6. Ἐπειδὴ κατὰ τὰ ἐν ἀριθμῷ 54 τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 24 ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 6 καὶ ἐπὶ 4, ἄρα τὸ ἐξαγόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 24 εἶναι τετράκις τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 6.

Καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 6 ἀριθμὸν ὑποτετραπλάσιον τοῦ 24 εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ γινομένου τοῦ 47 ἐπὶ 24, ἄρα διαιρεθέντος τοῦ πολυπλασιαστοῦ, διῃρέθη ὡσαύτως τὸ γινόμενον.

Ὅ,τι ἀπεδείχθη ὡς πρὸς τὸν πολυπλασιαστὴν, εὐκόλως συμπεραίνεται καὶ ὡς πρὸς τὸν πολυπλασιαστέον. Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ, ἀντιστρεφομένων τῶν παραγόντων, τὸ γινόμενον μένει τὸ αὐτὸ (ἀριθ. 56), ἄρα ἂν τὸν μὲν ἀνωτέρω πολυπλασιαστὴν 24 ἢ 6 ἐννοήσωμεν ὡς πολυπλασιαστέον, τὸν δὲ πολυπλασιαστέον 47 ὡς πολυπλασιαστὴν, ἐφαρμόζομεν καὶ ἐπ᾽ αὐτοῦ τὴν ἀποδειχθεῖσαν πρότασιν.

Β΄. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος προκύπτει ἤδη ἡ δευτέρα ἀρχὴ, ἂν πολυπλασιάσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων ἐπὶ ἀκέραιον τινὰ ἀριθμὸν, καὶ δι᾽ αὐτοῦ τούτου διαιρέσωμεν τὸν ἕτερον παράγοντα, τὸ γινόμενον τοῦ πολυπλασίου ἐπὶ τὸ ὑποπολυπλάσιον θέλει εἶσθαι τὸ αὐτὸ, ὁποῖον καὶ τὸ τῶν δεδομένων παραγόντων.

Διότι, πολυπλασιασθέντος μὲν τοῦ ἑνὸς παράγοντος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν, ἐπολυπλασιάσθη τὸ γινόμενον. Διαιρεθέντος δὲ τοῦ ἑτέρου, διῃρέθη τὸ γινόμενον. Οὕτω διὰ τὴν ἀμοιβαιότητα τῶν πράξεων τὸ ἐξαγόμενον οὐδεμίαν ἔπαθε ἀλλοίωσιν.

Ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ταύτης ἐρειδόμενοι δυνάμεθα πολλάκις νὰ μεταχειρισθῶμεν ὡς βάσανον τοῦ πολυπλασιασμοῦ τὸν πολυπλασιασμὸν τοῦ διπλασίου ἢ τριπλασίου ἑνὸς τῶν παραγόντων ἐπὶ τὸ ἥμισυ ἢ τὸ τριτημόριον τοῦ ἑτέρου· π. χ. τὸ γινόμενον τοῦ 673 ἐπὶ 72 εἶναι 48456 καὶ τὸ γινόμενον τοῦ 1346 (διπλασίου τοῦ 673) ἐπὶ 36 (ἥμισυ τοῦ 72) εἶναι ἐπίσης 48456.

Γ΄. Ἐπειδὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως πᾶς διαιρετέος θεωρεῖται ὡς γινόμενον τοῦ δεδομένου διαιρέτου καὶ τοῦ εὑρεθησομένου πηλίκου, ἕπεται, ὅτι πολυπλασιαζομένου, ἢ διαιρουμένου τοῦ διαιρετέου δι᾽ ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, πολυπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται τὸ πηλίκον. Διότι κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρώτην ἀρχὴν, πολυπλάσιος, ἢ ὑποπολυπλάσιος τοιοῦτος διαιρετέος, θεωρούμενος ὡς γινόμενον, προσδιορίζεται ἀπὸ τὸν πολυπλασιασμὸν τοῦ δεδομένου διαιρέτου ἐπὶ τοιοῦτόν τι πολυπλάσιον, ἢ ὑποπολυπλάσιον τοῦ ἑτέρου παράγοντος, ἤτοι τοῦ πηλίκου.

Δ΄. Ἀντιστρόφως· πολυπλασιαζομένου, ἢ διαιρουμένου τοῦ διαιρέτου δι᾽ ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, τὸ πηλίκον διαιρεῖται ἢ πολυπλασιάζεται. Διότι αὕτη εἶναι ἡ μόνη ὑπόθεσις, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν ἐπὶ τῇ βάσει, ὅτι ὁ μεταβληθεὶς οὗτος διαιρέτης, πολυπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ πηλίκον, δύναται νὰ παράξῃ τὸ αὐτὸ γινόμενον, εἴτ᾽ οὖν τὸν δεδομένον διαιρετέον. Τοῦτο δὲ συμφωνεῖ περιπλέον καὶ μὲ τὴν ἀνωτέρω δευτέραν ἀρχήν.

Ε΄. Ἐκ τῶν δύο τούτων τελευταίων ἀρχῶν συνάγεται ἡ ἑξῆς. Πολυπλατιαζομένων, ἢ διαιρουμένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.

Καθότι ὡς ἐκ τοῦ πολυπλασιασμοῦ ἢ τῆς διαιρέσεως τοῦ διαιρετέου πολυπλασιάζεται μὲν ἢ διαιρεῖται τὸ πηλίκον, ἀλλ᾽ ὡς ἐκ τῆς αὐτῆς πράξεως εἰς τὸν διαιρέτην διαιρεῖται ἢ πολυπλασιάζεται ἐπίσης. Οὕτω διὰ τὴν ἀμοιβαιότητα τῶν πράξεων τὸ ἐξαγόμενον μένει τὸ αὐτό. Τὴν ἀρχὴν ταύτην δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν καὶ ὡς βάσανον τῆς διαιρέσεως, ὡς ἐσημειώσαμεν περὶ τῆς δευτέρας διὰ τὸν πολυπλασιασμόν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Περὶ Κλασμάτων.

§. ά. Εἰσαγωγή.

78. Εἰς τὸν ἀριθμὸν 5 ἐδώκαμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ κλάσματος, ἢ γενικώτερον τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, εἰς δὲ τὸν §. έ. διελάβομεν ἐν ἐκτάσει περὶ τῆς ἀριθμήσεως καὶ τῆς γραφῆς αὐτῶν. Κατὰ τὰ τότε ἐκτεθέντα διὰ τὸν προσδιορισμὸν ἑκάστου κλάσματος θεωροῦνται ἀναγκαῖοι δύο ἀριθμοὶ, ὁ παρονομαστὴς καὶ ὁ ἀριθμητής. Ὁ μὲν ὅστις ἐμφαίνει τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα ἐννοεῖται διῃρημένη ἡ μονὰς, ὁ δὲ, ὅστις παριστᾷ πόσα τούτων λαμβάνονται εἰς ἀπαρτισμὸν τοῦ κλάσματος. Ἡ ἰδέα αὔτη, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἐννοοῦμεν τὰ κλάσματα, εἶναι γενικὴ τόσον διὰ τὰ προκύπτοντα ἐκ τῶν ὑπολοίπων τῆς καταμετρήσεως τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος, ὅσον καὶ διὰ τὰ παραγόμενα ἐκ τῶν ὑπολοίπων τῆς διαιρέσεως.

Ἀπ᾽ αὐτῆς τῆς παραστάσεως τῶν κλασματικῶν διακρίνεται ἤδη, ἂν προκείμενός τις ἀριθμὸς ἦναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος τῆς μονάδος ἢ καὶ ἴσος μὲ αὐτήν· διότι τοῦτο ἐξήρτηται ἀπὸ τὸ σχετικὸν μέγεθος τῶν ὅρων αὐτοῦ· οὕτως ἐκ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν $\frac{3}{8}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{8}{8}$ ὁ μὲν πρῶτος ἔχων ὀλιγώτερα τῶν ὀκτὼ μερῶν τῆς ἀρχικῆς μονάδος εἶναι μικρότερος αὐτῆς ἢ κύριον λεγόμενον κλάσμα, ὁ δὲ δεύτερος ἀνώτερος τῆς μονάδος, ὡς περιέχων περισσότερα τῶν ὀκτὼ μερῶν αὐτῆς, καὶ τέλος ὁ τρίτος παριστᾷ τὸ σύνολον τῶν μερῶν ἢ αὐτὴν τὴν ἰδίαν μονάδα.

79. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω παρατήρησιν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὴν μονάδα ἢ καὶ οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν ὑπὸ μορφὴν κλασματικοῦ μὲ δεδομένον τινὰ παρονομαστήν· πρὸς τοῦτο δὲ πολυπλασιάζομεν τὴν μονάδα ἢ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν προκείμενον παρονομαστὴν καὶ τὸ γινόμενον θεωροῦμεν ὡς ἀριθμητὴν τοῦ ζητουμένου κλασματικοῦ. Οὕτως ἡ μὲν μονὰς γραφομένη κλασματικῶς μὲ παρονομαστὴν φέρ᾽ εἰπεῖν 8 παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{8}{8}$· ἀκέραιός τις δὲ ἀριθμὸς, ἐξ ὑποθέσεως ὁ 3 παριστάνεται διὰ τοῦ $\frac{24}{8}$, τὸν ὁποῖον σχηματίζομεν διὰ τοῦ πολυπλασιασμοῦ τοῦ 3 ἐπὶ 8, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως.

80. Ὠφελούμενοι ἐκ τῆς κλασματικῆς ταύτης παραστάσεως τῶν ἀκεραίων δυνάμεθα νὰ ἑνώσωμεν εἰς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ὁμοειδῆ κλασματικὸν ἀριθμὸν δεδομένον τινὰ σύνθετον ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος. Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς $4 \frac{3}{5}$· ἐπειδὴ ὁ ἀκέραιος 4 ἰσοῦται μὲ $\frac{20}{5}$ ἄρα $4 \frac{3}{5}$ ἰσοῦται μὲ $\frac{20}{5}$ πλέον $\frac{3}{5}$, τουτέστι μὲ $\frac{23}{5}$· καὶ ὁμοίως $7 \frac{3}{4}$ ἰσοῦται μὲ $\frac{31}{4}$ καὶ ἐφεξῆς. Καὶ ἐν γένει, ἵνα τρέψωμεν ἀκέραιον καὶ κλάσμα εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν, πολυπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, εἰς δὲ τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὸν ἀριθμητὴν, καὶ τὸ οὕτω λαμβανόμενον ἐξαγόμενον γράφομεν ἀριθμητὴν τοῦ ἰσοδυνάμου κλασματικοῦ, παρονομαστὴς τοῦ ὁποίου εἶναι ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος.

Ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται ἀγωγὴ ἀκεραίου καὶ κλάσματος εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν ἢ ἁπλῶς ἀγωγή· ὡς θέλομεν δὲ ἰδεῖ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν κλασμάτων ἡ χρῆσις αὐτῆς εἶναι οὐσιωδεστάτη.

81. Τὸ ἀντίστροφον ζήτημα ἡ ἐξαγωγὴ τοῦ ἀκεραίου ἀπὸ κλασματικοῦ τινος ἀριθμοῦ εἶναι ὡσαύτως πρᾶξις οὐσιωδεστάτη εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν κλασμάτων· τουτέστι δοθέντος κλασματικοῦ τινος ἀριθμοῦ, νὰ διακρίνωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος ἀπὸ τοῦ κυρίου κλάσματος.

Ἔστω π. χ. ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{23}{6}$. Ἐπειδὴ ἡ μονὰς ὡς ὅλον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν αὐτῆς, τουτέστιν $\frac{6}{6}$, φανερὸν ὅτι εἰς τὸν ἀριθμὸν $\frac{23}{6}$ ἐμπεριέχεται τοσάκις ἡ ἀκεραία ἀρχικὴ μονὰς, ὁσάκις εἰς τὸν ἀριθμητὴν 23 ἐμπεριέχεται ὁ παρονομαστὴς 6· ἄρα διαιροῦντες τὸν 23 διὰ τοῦ 6 λαμβάνομεν πηλίκον 3 καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 5 μένει ὑπὸ τὴν κλασματικὴν παράστασιν $\frac{5}{6}$. Οὕτω δὲ $\frac{23}{6}$ ἰσοῦται μὲ $3 \frac{5}{6}$· παρομοίως $\frac{37}{7}$ ἰσοῦται μὲ $5 \frac{2}{7}$ κτλ.

Καὶ ἐν γένει, ἵνα ἐξάξωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος ἀπὸ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ μὲν συναγόμενον πηλίκον εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ συμπληρωματικοῦ κλάσματος, παρονομαστὴς τοῦ ὁποίου μένει ὁ αὐτὸς ὁ τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ.

82. Συνέπεια τῆς ἀποδοθείσης σημασίας τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος εἶναι ὡσαύτως καὶ αἱ ἑξῆς ἀρχαὶ, ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν κλασμάτων.

Α΄. Ἐὰν αὐξήσωμεν ἢ ἐλαττώσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τινος κλάσματος χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν ποσῶς τὸν παρονομαστὴν, τὸ κλάσμα αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται.

Διότι ὁ μὲν παρονομαστὴς, παριστῶν τὰ μέρη τῆς ἀρχικῆς μονάδος, χαρακτηρίζει τὸ μέγεθος αὐτῶν, ἓν τῶν ὁποίων ὡς δευτερεύουσα μονὰς καταμετρεῖ τὸ κλάσμα· οὕτω λοιπὸν κατὰ τὴν ἐκφωνηθεῖσαν πρότασιν, ἐν ᾧ τὰ μέρη ταῦτα μένουσιν ἰσομεγέθη, ὡς μὴ μεταβαλλομένου τοῦ παρονομαστοῦ ἐξ ἑτέρου λαμβάνομεν περισσότερα ἢ ὀλιγώτερα κατὰ τὴν γενομένην αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ ὡς ἐκ τούτου αὐξομειοῦται τὸ κλάσμα.

Ἡ αὐτὴ ἀρχὴ ὑπὸ μερικωτέραν ἔποψιν προτείνεται ὡς ἑξῆς. Πολυπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου μόνον τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν, πολυπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται τὸ κλάσμα· οὕτω $\frac{3}{5}$ εἶναι τὸ τριπλοῦν τοῦ $\frac{1}{5}$ καὶ ὁμοίως $\frac{10}{23}$ εἶναι τὸ διπλοῦν τῶν $\frac{5}{23}$ κτλ. καὶ ἀντιστρόφως τὸ τριτημόριον τῶν $\frac{3}{5}$ εἶναι $\frac{1}{5}$ καὶ τὸ ἥμισυ τῶν $\frac{10}{23}$ εἶναι $\frac{5}{23}$ καὶ ἐφεξῆς. Διότι ἡ πρότασις αὕτη ἔχει λόγον πρὸς τὴν ἤδη ἀποδειχθεῖσαν ἀρχὴν, ὃν ὁ πολυπλασιασμὸς τῶν ἀκεραίων πρὸς τὴν πρόσθεσιν, καὶ ἡ διαίρεσις πρὸς τὴν ἀφαίρεσιν.

Β'. Ἐὰν μεταβάλωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, χωρὶς νὰ ἀλλοιώσωμεν καὶ τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ, ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος μεταβάλλεται· καὶ ἐλαττοῦται μὲν, αὐξανομένου τοῦ παρονομαστοῦ, αὐξάνει δὲ, ἐλαττουμένου αὐτοῦ.

Διότι αὐξάνοντες τὸν παρονομαστὴν, ἐννοοῦμεν τότε εἰς περισσότερα μέρη διαιρουμένην τὴν ἀρχικὴν μονάδα καὶ ἑπομένως μικρότερα τῶν τῆς προτέρας διαιρέσεως τῆς ἰδίας· καὶ ἐπειδὴ, μὴ μεταβαλλομένου τοῦ ἀριθμητοῦ, λαμβάνομεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μερῶν, ἄρα τὸ σύνολον τῶν δευτέρων τούτων ἀποτελεῖ ποσότητα μικροτέραν τῆς ὑπὸ τῶν πρώτων, καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται.

Ἀντιστρόφως, ἐλαττουμένου τοῦ παρονομαστοῦ, αὐξάνει τὸ κλάσμα, καθὸ συνιστάμενον τότε ἐκ τοῦ αὐτοῦ μὲν ἀριθμοῦ τῶν μερῶν τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἀλλὰ μεγαλητέρων τῶν τῆς προτέρας διαιρέσεως, ὡς διαιρεθείσης αὐτῆς εἰς ὀλιγώτερα μέρη.

Τὴν ἀρχὴν ταύτην θεωροῦντες ὑπὸ μερικωτέραν ἔποψιν, ὡς καὶ τὴν ἀνωτέρω, προτείνομεν ὡς ἑξῆς.

Διαιρουμένου τοῦ παρονομαστοῦ, πολυπλασιάζεται, καὶ πολυπλασιαζομένου τοῦ παρονομαστοῦ, διαιρεῖται τὸ κλάσμα. Διότι ὑποτεθείσθω, ὅτι ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος πολυπλασιάζεται ἐπὶ 2, ἢ 3, ἢ ἄλλον τινὰ ἀκέραιον ἀριθμὸν, φανερὸν, ὅτι διπλασιαζομένου, ἢ τριπλασιαζομένου καὶ ἐν γένει πολυπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μερῶν τῆς μονάδος, ἕκαστον μέρος δύναται τότε τὸ ἥμισυ ἢ τὸ τριτημόριον ἢ πολλοστημόριόν τι τοῦ τῆς προτέρας διαιρέσεως, καὶ οὕτως αὐτὸ τὸ κλάσμα ἔχει τὸ ἥμισυ ἢ τὸ τριτημόριον ἢ πολλοστημόριόν τι τῆς ἀξίας τοῦ πρώτου· π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν $\frac{3}{4}$ ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{4}$ ἰσοῦται μὲ δὶς $\frac{1}{8}$, καὶ ὁμοίως $\frac{4}{15}$ εἶναι τὸ τριτημόριον τῶν $\frac{4}{5}$ ἐπειδὴ $\frac{1}{5}$ ἰσοῦται μὲ τὸ τρὶς $\frac{1}{15}$ κτλ.

Τὸ ἀντίστροφον ἐξάγεται, ἂν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος. Διότι τότε ἓν τῶν μερῶν τοῦ δευτέρου κλάσματος δύναται δὶς, τρὶς καὶ ἐν γένει τοσάκις τὸ ἓν μέρος τοῦ πρώτου, ὅσος εἶναι ὁ ἀκέραιος διαιρέτης. Οὕτω π. χ. $\frac{5}{6}$ εἶναι τὸ διπλοῦν τῶν $\frac{5}{12}$ ἢ τὸ τριπλοῦν τῶν $\frac{5}{18}$ κτλ. Διότι τὸ $\frac{1}{6}$ δύναται δὶς τὸ $\frac{1}{12}$ ἢ τρὶς τὸ $\frac{1}{18}$ κτλ.

Αἱ ἀνωτέρω δύο ἀρχαὶ ἀνακεφαλαιοῦνται κατὰ τὸν ἑξῆς πίνακα.

Πολυπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου	τοῦ ἀριθμητοῦ	πολυπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται	τὸ κλάσμα.
Πολυπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου	τοῦ παρονομαστοῦ	διαιρεῖται ἢ πολυπλασιάζεται	τὸ κλάσμα·

ἐξ οὗ καταφαίνεται, ὅτι αἱ πράξεις ἐκτελούμεναι μὲν ἐπὶ τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπιφέρουσι καὶ ἐπὶ τοῦ κλάσματος τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ἐπὶ δὲ τοῦ παρονομαςοῦ εἶναι ὡς πρὸς τὸ συναγόμενον κλάσμα κατὰ σχέσιν ἀντίστροφον.

Γ΄. Ἐκ τῶν εἰρημένων δύο πορίζόμεθα ἤδη τὴν ἑξῆς τρίτην ἀρχήν.

Πολυπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα δὲν μεταβάλλεται.

Διότι ὡς ἐκ τοῦ πολυπλασιασμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ τὸ κλάσμα πολυπλασιάζεται, ἀλλ᾽ ὡς ἐκ τοῦ πολυπλασιασμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ διαιρεῖται ἐπίσης· καὶ ὁμοίως διαιρουμένου τοῦ ἀριθμητοῦ, διαιρεῖται τὸ κλάσμα, ἀλλὰ διαιρουμένου τοῦ παρονομαστοῦ, πολυπλασιάζεται ἐπίσης· ὥστε καθ᾽ ἑκατέραν τῶν μεταμορφώσεων τοῦ κλάσματος ἀποτελεῖται ἀμοιβαιότης εἰς τὰς πράξεις καὶ ἑπομένως προσδιορίζονται ἰσοδύναμα ἐξαγόμενα.

Κατὰ τὴν ἀρχὴν ταύτην τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τρέπεται εἰς τὰ ἰσοδύναμα $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$ κτλ. πολυπλασιαζομένων τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐπὶ 2, 3, 4 κτλ. Καὶ ὁμοίως τὸ κλάσμα $\frac{42}{54}$ ἰσοῦται μὲ $\frac{21}{27}$, $\frac{14}{18}$, $\frac{7}{9}$, διαιρουμένων τῶν ὅρων αὐτοῦ διὰ τοῦ 2, 3, ἢ 6.

83. Καὶ χωρὶς τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως ἠδυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν τὰς ἀρχὰς ταύτας καὶ ὡς συνεπείας τῶν συσταθεισῶν ἀρχῶν ἐπὶ τοῦ πολυπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως (ἀριθ. 77) ἐπειδὴ θεωροῦντες τὰ κλάσματα, ὡς προκύπτοντα ἐκ τῆς διαιρέσεως, δυνάμεθα νὰ ἐκλάβωμεν τὸν μὲν ἀριθμητὴν ὡς διαιρετέον, τὸν δὲ παρονομαστὴν ὡς διαιρέτην. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀνάπτυξιν, ἐν ᾧ διευκρινίζομεν ἐπὶ μᾶλλον τὴν ἰδέαν, θεωροῦμεν ἐνταυτῷ τὰ κλάσματα ἀπολύτως ὑπὸ τὴν καθολικὴν ἔποψιν.

Μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν ταύτην ἔπρεπεν ἤδη νὰ μεταβῶμεν εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ ἐπὶ τῶν κλασμάτων, ἀλλὰ πρὸ τούτου ἀνάγκη νὰ διαλάβωμεν προκαταρκτικῶς περὶ δύο προπαρασκευαστικῶν ἐργασιῶν, τῶν ὁποίων τὴν χρείαν θέλομεν γνωρίσει ἀμέσως· αὗται δὲ εἶναι ἡ ἀγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ ἡ ἁπλουστέρα παράστασις αὐτῶν διὰ μικροτέρων ὅρων.

§. 6'. Περὶ τῆς ἀγωγῆς τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

84. Καθόσον παρετηρήσαμεν, τὰ κλάσματα δὲν ἔχουσι τὴν ἰδιότητα, ὡς οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, τοῦ νὰ ἐκτιμῶνται διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος. Ἐπειδὴ ἡ ἄμεσος καταμέτρησις αὐτῶν γίνεται πρὸς τὴν δευτερεύουσαν μονάδα, ἡ ὁποία εἶναι ἄλλοτε ἄλλη κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν μερῶν τῆς ἀρχικῆς μονάδος, τὰ ὁποῖα παριστάνει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος καὶ ἐκ τούτου προκύπτουσι τὰ ἑτεροειδῆ λεγόμενα κλάσματα· ἐξ ἑτέρου ὅμως εἴδομεν, ὅτι κλάσμα τι δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ πολλῶν ἰσοδυνάμων παραστάσεων ἁπλουστέρων ἢ συνθετωτέρων, καθόσον οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι μικρότεροι ἢ μεγαλήτεροι.

Ἐκ τούτου ἡ ἀγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, περὶ τῆς ὁποίας ἤδη διαλαμβάνομεν, εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δύο ἢ περισσότερα κλάσματα ἑτεροειδῆ δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα ὁμοειδῆ.

Ἔστωσαν κατὰ πρῶτον δύο κλάσματα π. χ. $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{4}{7}$· πολυπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 7 τοῦ δευτέρου καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 5 τοῦ πρώτου κατὰ τὴν τρίτην ἀρχὴν (ἀριθ. 82) τὰ κλάσματα θέλουσιν εἶσθαι ἰσοδύναμα, θέλουσιν ἔχει δὲ καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, διότι εἰς ἀμφότερα θέλει εἶσθαι παρονομαστὴς τὸ γινόμενον τῶν δύο παρονομαστῶν 5 καὶ 7· οὕτω τῷ ὄντι συνάγομεν τὰ ἰσοδύναμα ὁμοειδῆ $\frac{21}{35}$ καὶ $\frac{20}{35}$.

$$\begin{array}{cc} \frac{3}{5} & \frac{4}{7} \\ 7 & 5 \\ \hline \frac{21}{35} & \frac{20}{35} \end{array}$$

Ἔστωσαν ἤδη τὰ τρία κλάσματα $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{8}{11}$. Εἶναι εὔκολον νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἂν πολυπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων, τὰ νέα κλάσματα κατὰ μὲν τὴν τρίτην ἀρχὴν (ἀριθ. 82) θέλουσιν εἶσθαι ἰσοδύναμα μὲ τὰ δεδομένα· θέλουσιν εἶσθαι δὲ ὁμοειδῆ, ἐπειδὴ κοινὸς παρονομαστὴς θέλει εἶσθαι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παρονομαστῶν 4, 7, 11, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ πολυπλασιασμοῦ (ἀριθ. 56) προσδιορίζεται πάντοτε τὸ αὐτὸ καθ' ὅντινα συνδυασμὸν λάβωμεν τοὺς παράγοντας.

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{4} & \frac{5}{7} & \frac{8}{11} \\ 77 & 44 & 28 \\ \hline \frac{231}{308} & \frac{220}{308} & \frac{224}{308} \end{array}$$

Οὕτω πολυπλασιαζομένων τῶν ὅρων τοῦ πρώτου ἐπὶ 77 γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 7 καὶ 11, εὑρίσκομεν $\frac{231}{308}$.

Ὁμοίως πολυπλασιαζομένων τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου ἐπὶ 44, γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 4 καὶ 11, εὑρίσκομεν $\frac{220}{308}$.

Καὶ τέλος διὰ τοῦ πολυπλασιασμοῦ τῶν ὅρων τοῦ τρίτου ἐπὶ 28, γινόμενον τῶν πολυπλασιαστῶν 4 καὶ 7, εὑρίσκομεν $\frac{224}{308}$.

85. Ἐπειδὴ ὁ ἀνωτέρω συλλογισμὸς λαμβάνει χώραν καὶ εἰς ὁσαδήποτε κλάσματα, συνάγομεν ἄρα τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

Ἵνα τρέψωμεν ὁσαδήποτε κλάσματα ἑτεροειδῆ εἰς ἰσοδύναμα ὁμοειδῆ, πολυπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὅλων τῶν ἄλλων.

Πρὸς ἐφαρμογὴν φέρομεν καὶ τὸ ἑξῆς παράδειγμα κατὰ τὸν ὑποσρωννύμενον πίνακα τῶν πράξεων.

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{17}{25}$.
30800	13200	8400	5775	3696
$\frac{61600}{92400}$	$\frac{52800}{92400}$	$\frac{50400}{92400}$	$\frac{75075}{92400}$	$\frac{62832}{92400}$

Εὑρίσκομεν παρομοίως, ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{7}$
τρέπονται εἰς τὰ ἰσοδύναμα $\frac{280}{420}$ $\frac{315}{420}$ $\frac{336}{420}$ $\frac{300}{420}$

Καὶ ὁμοίως τὰ κλάσματα $\frac{1}{9}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{11}$
ἀνάγονται εἰς τὰ ὁμοειδῆ $\frac{44}{396}$ $\frac{297}{396}$ $\frac{180}{396}$

86. Εἶναι φανερὸν, ὅτι καθόσον τὰ κλάσματα εἶναι πολλὰ τὸν ἀριθμὸν, ἢ ἔχουσι μεγάλους παρονομαστὰς, κατὰ τοσοῦτον ἡ πρᾶξις καθίσταται δυσχερεστέρα. Ἀλλ' ὁ ἀποδοθεὶς κανὼν εἶναι ὁ μόνος διὰ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν τὴν γενικὴν λύσιν τοῦ ζητήματος. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ὅμως οἱ παρονομασταὶ τῶν δεδομένων κλασμάτων παρουσιάζονται τοιοῦτοι πρὸς ἀλλήλους, ὥστε εἰς τὰς περιστάσεις ταύτας οὐχὶ μόνον τὴν πρᾶξιν δυνάμεθα νὰ διευκολύνωμεν μεγάλως, ἀλλὰ καὶ τὰ συναγόμενα ὁμοειδῆ νὰ λάβωμεν ὑπὸ ἁπλουστέρους ὅρους. Περὶ τούτου θέλομεν διαλάβει μὲν ἐν ἐκτάσει εἰς τὸ έ. κεφάλαιον ἐπιστηριζόμενοι εἰς ἰδιότητάς τινας τῶν ἀριθμῶν, ἐνταῦθα δὲ ἀναφέρομεν ὡς ἐκ προκαταβολῆς περὶ τῆς ἑξῆς περιστάσεως, τὴν ὁποίαν ἀπαντῶμεν συχνάκις· ὅταν δηλ. ὁ μεγαλήτερος παρονομαστὴς διαιρῆται ἀκριβῶς δι' ἑκάστου τῶν ἄλλων.

Ἔστωσαν π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{11}{12}$ $\frac{13}{18}$ καὶ $\frac{31}{36}$.

Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς 36 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων παρονομαστῶν 2, 3, 4, 6, 12 καὶ 18· καὶ παράγονται τὰ ἀκέραια πηλίκα 18, 12, 9, 6, 3 καὶ 2, πολυπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλητέρου παρονομαστοῦ διὰ τοῦ παρονομασοῦ τοῦ ἀναγομένου. Ἐκ τούτου ἐννοοῦμεν εὐκόλως, ὅτι τὰ οὕτω συναγόμενα κλάσματα λαμβάνουσι τότε κοινὸν παρονομαστὴν τὸν ἀνώτερον τῶν παρονομαστῶν τῶν δεδομένων, ὡς ἐνταῦθα τὸν 36.

Ἰδοὺ ἡ πρᾶξις.

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{5}{6} & \frac{11}{12} & \frac{13}{18} & \frac{31}{36} \\
18 & 12 & 9 & 6 & 3 & 2 & 1 \\
\hline
\frac{18}{36} & \frac{24}{36} & \frac{27}{36} & \frac{30}{36} & \frac{33}{36} & \frac{26}{36} & \frac{31}{36}
\end{array}$$

Ὁμοίως τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}\ \frac{3}{5}\ \frac{7}{9}\ \frac{13}{15}\ \frac{29}{45}$

ἀνάγονται εἰς $\frac{30}{45}\ \frac{27}{45}\ \frac{35}{45}\ \frac{39}{45}\ \frac{29}{45}$

87. Πολλάκις ὁ μεγαλήτερος παρονομαστὴς διαιρεῖται μὲν ἀκριβῶς διὰ πολλῶν ἐκ τῶν ἄλλων, οὐχὶ δὲ δι' ὅλων, ὡς εἰς τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6}\ \frac{7}{8}\ \frac{11}{12}\ \frac{13}{24}\ \frac{31}{36}$, εἰς τὰ ὁποῖα παρεμποδίζεται ἡ διαίρεσις τοῦ παρονομαστοῦ 36 διὰ τῶν δύο παρονομαστῶν 8 καὶ 24.

Εἰς τὰς περιστάσεις ταύτας παρατηροῦμεν μήπως μικρός τις ἀριθμὸς, οἷον 2, 3, 4, 5, 7 κτλ., πολυπλασιάζων τὸν μεγαλήτερον παρονομαστὴν καθιστᾷ αὐτὸν τέλειον πολυπλάσιον ἑκάστου τῶν ἄλλων, καὶ τότε ὑπερνικῶμεν τὴν ἀπαντωμένην δυσκολίαν, χωρὶς νὰ καταφύγωμεν εἰς τὸν γενικὸν κανόνα. Οὕτως εἰς τὸ προκείμενον παράδειγμα εἶναι ὁ ἀριθμὸς 2· ὅθεν διπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{31}{36}$ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον $\frac{62}{72}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἑκάστου τῶν ἄλλων καὶ ἑπομένως τὰ διδόμενα κλάσματα λαμβάνουσιν ὅλα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν 72 κατὰ τὸν ἑπόμενον πίνακα.

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{5}{6} & \frac{7}{8} & \frac{11}{12} & \frac{13}{24} & \frac{31}{36} \\
24 & 18 & 12 & 9 & 6 & 3 & 2 \\
\hline
\frac{48}{72} & \frac{54}{72} & \frac{60}{72} & \frac{63}{72} & \frac{66}{72} & \frac{39}{72} & \frac{62}{72}
\end{array}$$

Ἀλλὰ περὶ τούτου, ὡς προείπομεν, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ πολλὴν γύμνασιν εἰς τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν, θέλομεν διαλάβει ὁριστικῶς καὶ κατ' ἔκτασιν εἰς τὰ ἑπόμενα μαθήματα. Ἤδη δὲ χάριν ἐφαρμογῆς φέρομεν τὰ ἑξῆς ζητήματα.

88. Ζήτημα ά. — Ἐκ δύο κλασμάτων διαφόρων ὅρων ὡς $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{7}{12}$, ποῖον εἶναι τὸ μεγαλήτερον;

Ἐκ πρώτης ὄψεως δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποκριθῶμεν εἰς τὸ ζήτημα. Ἐπειδὴ διὰ τὴν ἀνισότητα τῶν ἀριθμητῶν καὶ τῶν παρονομαστῶν συγχρόνως, εἶναι μὲν τὰ μέρη τοῦ πρώτου ὀλιγώτερα τῶν τοῦ δευτέρου, ἀλλὰ καὶ μεγαλήτερα, τὸ ἀνάπαλιν δὲ εἰς τὸ δεύτερον. Πραττομένης ὅμως τῆς ἀγωγῆς εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, λαμβάνομεν τὰ ὁμοειδῆ $\frac{36}{60}\ \frac{35}{60}$, ἐκ τῶν ὁποίων πληροφορούμεθα, ὅτι τὸ πρῶτον $\frac{3}{5}$ ἰσοδύναμον μὲ $\frac{36}{60}$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $\frac{7}{12}$ ἰσοδυνάμου μὲ $\frac{35}{60}$.

Ὁμοίως γνωρίζομεν ὅτι ἐκ τῶν τριῶν κλασμάτων $\frac{6}{7}\ \frac{7}{9}$ καὶ $\frac{11}{13}$ ἀναγομένων εἰς $\frac{702}{819}\ \frac{637}{819}$ καὶ $\frac{693}{819}$ τὸ μὲν $\frac{6}{7}$ εἶναι τὸ μεγαλήτερον, τὸ δὲ $\frac{11}{13}$ εἶναι τὸ μέσον καὶ τὸ $\frac{7}{9}$ τὸ μικρότερον.

89. Ζήτημα β΄.—Ποίαν τροπὴν φέρει εἰς τὸ κλάσμα ἡ πρόσθεσις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἰς τοὺς δύο ὅρους.

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{7}{12}$, προστιθεμένου τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 6 εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{13}{18}$. Ἵνα προσδιορίσωμεν ἤδη τὴν ὡς ἐκ τούτου γενομένην τροπὴν, ἄγομεν τὰ κλάσματα $\frac{7}{12}$ καὶ $\frac{13}{18}$ εἰς τὰ ἰσοδύναμα ὁμοειδῆ $\frac{21}{36}$ καὶ $\frac{26}{36}$· ἐκ τῶν ὁποίων καταφαίνεται ἤδη, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{26}{36}$, ἢ τὸ ἰσοδύναμον $\frac{13}{18}$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $\frac{21}{36}$, ἢ τοῦ ἰσοδυνάμου μὲ τὸ προτεθὲν $\frac{7}{12}$ καὶ ἑπομένως ἡ πρόσθεσις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἐπέφερεν αὔξησιν εἰς τὸ κλάσμα.

Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἀλήθειαν ταύτην καὶ χωρὶς τῆς βοηθείας τοῦ ὑπολογισμοῦ σκεπτόμενοι ὡς ἐφεξῆς. Ἐπειδὴ ἡ μονὰς ἰσοῦται μὲ $\frac{12}{12}$ ἢ μὲ $\frac{18}{18}$ ἄρα ἡ μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τοῦ δεδομένου κλάσματος $\frac{7}{12}$ διαφορὰ εἶναι $\frac{5}{12}$ καὶ παρομοίως ἡ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τοῦ συναγομένου $\frac{13}{18}$ εἶναι $\frac{5}{18}$. Τώρα εἶναι φανερὸν, ὅτι κλάσμα τι εἶναι κατὰ τοσοῦτον μεγαλήτερον ἢ μικρότερον, καθόσον ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλητέρα. Ἡ διαφορὰ δὲ αὕτη εἰς μὲν τὸ δεδομένον παριστάνεται διὰ $\frac{5}{12}$, εἰς δὲ τὸ συναγόμενον διὰ τοῦ $\frac{5}{18}$· καὶ ἐπειδὴ ἀμφότεραι ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν, διαφέρουσι δὲ κατὰ τὸν παρονομαστὴν, διὰ τοῦτο ἡ δευτέρα $\frac{5}{18}$ μικροτέρα τῆς πρώτης $\frac{5}{12}$ χαρακτηρίζει τὴν ὑπεροχὴν τοῦ κλάσματος $\frac{13}{18}$ ὑπὲρ τὸ δεδομένον $\frac{7}{12}$· ὅθεν ἡ πρόσθεσις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπιφέρει αὔξησιν εἰς τὸ κλάσμα.

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν καὶ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα, ὅτι δηλ. ἡ ἀφαίρεσις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τῶν δύο ὅρων ἐπιφέρει ἐλάττωσιν εἰς τὸ κλάσμα, ἐκ τοῦ διττοῦ τούτου θεωρήματος συμπεραίνομεν λοιπὸν, ὅτι ἡ ἐξηγηθεῖσα ἰδιότης τοῦ πολυπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τὸ νὰ μὴ ἐπιφέρωσι μεταβολὴν εἰς τὸ κλάσμα, ὁσάκις ἐκτελοῦνται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἐπὶ τῶν δύο ὅρων, δὲν ἔχει χώραν καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν. Διὸ καὶ ὁσάκις πρόκειται νὰ μεταβάλωμεν τὴν μορφὴν τοῦ κλάσματος, οὐχὶ δὲ καὶ τὴν τιμὴν αὐτοῦ, ἀναγκαίως πρέπει νὰ καταφύγωμεν εἰς μίαν τῶν δύο τούτων πράξεων τὸν πολυπλασιασμὸν ἢ τὴν διαίρεσιν.

§. γ΄. Ἀγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τοὺς ἐλαχίστους ὅρους.

90. Παρεκτὸς τοῦ ὅτι ἡ ἰδέα κλάσματός τινος λαμβάνεται καθαρωτέρα, καθόσον οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι μικρότεροι, θέλομεν ἰδεῖ πρὸς τούτοις

ὅτι καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ τῶν κλασμάτων ἀποβαίνουσιν ἐπὶ μᾶλλον συντομώτεροι κατὰ λόγον τοῦ μεγέθους τῶν ὅρων αὐτῶν. Συμφέρει ἄρα νὰ γνωρίζωμεν νὰ ἀνάγωμεν δεδομένον τι κλάσμα εἰς τὴν ἁπλουστέραν ἔκφρασιν καὶ τοῦτο ἐρχόμεθα ἤδη νὰ ἐκθέσωμεν εἰς τὴν δευτέραν ταύτην προκαταρκτικὴν ἐργασίαν.

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἀνωτέρω παρατήρησιν μόνη ἡ διαίρεσις δύναται νὰ σμικρύνῃ τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, χωρὶς νὰ ἀλλοιώσῃ τὴν τιμὴν αὐτοῦ, ὁσάκις ἐκτελεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, διὰ τοῦτο τὸ πρῶτον μέσον, τὸ ὁποῖον παρουσιάζεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ ζητήματος, εἶναι νὰ διαιρέσωμεν, καθόσον εἶναι δυνατὸν, τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διαδοχικῶς διὰ τοῦ 2, 3 κτλ.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{108}{144}$· διαιροῦντες διαδοχικῶς τοὺς δύο ὅρους διὰ τῶν ἀριθμῶν 2, 2, 3 καὶ 3 λαμβάνομεν αὐτὸ ὑπὸ τὰς ἑξῆς τέσσαρας παραστάσεις $\frac{54}{72}$, $\frac{27}{36}$, $\frac{9}{12}$ καὶ $\frac{3}{4}$, ἐξ ὧν ἡ τελευταία εἶναι ἡ ἁπλουστάτη. Ἀλλὰ τὸ μέσον τοῦτο δὲν δύναται νὰ χρησιμεύσῃ, εἰμὴ ὅταν γνωρίζωμεν τοὺς ἀριθμοὺς, οἱ ὁποῖοι διαιροῦσιν ἀκριβῶς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος, καὶ περὶ τούτου θέλομεν διαλάβει ἐν ἐκτάσει εἰς τὸ Ε΄. κεφάλαιον. Διὰ τοῦτο ἐπὶ τοῦ παρόντος ἐξηγοῦμεν ἄλλον τρόπον τῆς ἁπλοποιήσεως τῶν κλασμάτων, ὅστις συνίσταται εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν ἀπ' εὐθείας τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν, τὸν δυνάμενον νὰ διαιρέσῃ ἀκριβῶς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος.

Οὕτω π. χ. δοθέντος τοῦ ἀνωτέρω κλάσματος $\frac{108}{144}$, θέλομεν ἐκθέσει μέθοδον, δι' ἧς προσδιορίζομεν ἀμέσως τὸν ἀριθμὸν 36, ὅστις διαιρῶν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος τρέπει αὐτὸ εἰς τὸ ἁπλούστατον $\frac{3}{4}$. Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον πρὸς διάκρισιν τῶν ἄλλων κοινῶν διαιρετῶν ὀνομάζομεν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην· προεισαγωγικῶς δὲ ἀναφέρομεν κατὰ πρῶτον τοὺς ἑξῆς ὁρισμοὺς καί τινας ἀναγκαίας ἀρχάς.

91. Α΄. Ἀριθμός τις λέγεται πολυπλάσιος ἑτέρου, ὅταν ἐμπεριέχῃ αὐτὸν ὁλοσχερῶς πολλάκις, καὶ ἑπομένως διαιρῆται δι' αὐτοῦ ἀκριβῶς· ἀντιστρόφως δὲ ὁ δεύτερος οὗτος λέγεται ὑποπολυπλάσιος, ἢ πολλοστόν τι, ἢ ἀκριβὴς διαιρέτης τοῦ πρώτου.

Οὕτως ὁ 24 εἶναι πολυπλάσιος τοῦ 6· ἐπειδὴ τετράκις 6 δίδει 24· καὶ ἀντιστρόφως 6 καὶ 4 εἶναι ὑποπολυπλάσιοι, ἢ ἀκριβεῖς διαιρέται τοῦ 24. Παρομοίως ὁ 60 εἶναι πολυπλάσιος τοῦ 12, ἐπειδὴ πεντάκις 12 δίδει 60· ὁ δὲ 5, ἢ ὁ 12, εἶναι ὑποπολυπλάσιος τοῦ 60 κτλ.

Β΄. Καλεῖται ἀριθμὸς πρῶτος, πᾶς ὅςις δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην, εἰμὴ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα. Οὕτω 2, 3, 5, 7, 11, 13, κτλ. εἶναι πρῶτοι ἀριθμοὶ, ὡς μὴ διαιρούμενοι δι' οὐδενὸς ἀριθμοῦ, εἰμὴ δι' ἑαυτῶν καὶ τῆς μονάδος.

ὅλοι δὲ οἱ μὴ ὑπαγόμενοι εἰς τὴν κατηγορίαν ταύτην, ὡς οἱ 4, 6, 8, 10, 12, 14 κτλ., οἵτινες διαιροῦνται ἀκριβῶς δι᾽ ἄλλων διαιρετῶν 2, 3, 5, 7, κτλ. εἶναι πολυπλάσιοι τῶν πρώτων.

Μεταξὺ τῶν πρώτων καὶ τῶν πολυπλασίων ὑπάρχει ἡ διαφορά, ὅτι οἱ μὲν πρῶτοι δὲν ἔχουσιν ἄλλον σχηματισμὸν εἰμὴ μόνον τὸν τῆς ἀριθμήσεως διὰ τῆς διαδοχικῆς προσθέσεως τῆς μονάδος (ἀριθ. 3)· οἱ δὲ πολυπλάσιοι δύνανται νὰ παραχθῶσι καὶ δι᾽ ἄλλων ἀριθμῶν, τουτέστι δι᾽ αὐτῶν τῶν ἀκριβῶν διαιρετῶν, προστιθεμένων εἰς ἑαυτοὺς πολλάκις.

Γ΄. Δύο ἀριθμοὶ λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅταν δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην, εἰμὴ τὴν μονάδα· ὡς 8 καὶ 15, ἢ ὡς 14 καὶ 45 κτλ.

Οἱ ὑπαγόμενοι εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦτον εἶναι ὀλίγοι, οἱ περισσότεροι δὲ ἔχουσι κοινοὺς διαιρέτας ὡς 12 καὶ 18 διαιρούμενοι διὰ τοῦ 2, 3 καὶ 6 καὶ ὁμοίως οἱ 42 καὶ 63 διαιρούμενοι διὰ τοῦ 3, 7, καὶ 21, κτλ.

92. Α΄. Ἀρχή. Πᾶς ἀκριβὴς διαιρέτης ἀριθμοῦ τινος, διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ ἕκαστον πολυπλάσιον αὐτοῦ.

Ἔστω π. χ. ὁ 4, ὅστις διαιρεῖ τὸν 24 καὶ δίδει ἀκέραιον πηλίκον 6· ὁ ἀριθμὸς 4 πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸν 120, ὄντα γινόμενον τοῦ 24 ἐπὶ 5, καὶ ἐν γένει πᾶν πολυπλάσιον τοῦ 24. Διότι κατὰ τὴν ἐξηγηθεῖσαν ἀρχὴν τῆς διαιρέσεως, πολυπλασιαζομένου τοῦ διαιρετέου ἐπί τινα ἀριθμὸν, πολυπλασιάζεται ἐπίσης τὸ πηλίκον. Ἐκ τούτου τὸ πηλίκον τοῦ 120 διὰ 4 πρέπει νὰ ἦναι πεντάκις τὸ πρότερον πηλίκον 6 καὶ ἑπομένως ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 30.

Παρομοίως ἐπειδὴ 60 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 12 καὶ δίδει πηλίκον 5, πρέπει καὶ ὁ 480, ἤτοι ὀκτάκις 60, νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ 12. Διότι πρέπει νὰ προκύψῃ πηλίκον ἀκέραιον, τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ προτέρου πηλίκου 5, ἤτοι 40 κτλ.

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἐκφράζεται καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ἀριθμός τις διαιρῶν ἀκριβῶς ἕνα τῶν παραγόντων τινὸς γινομένου, διαιρεῖ καὶ τὸ γινόμενον. Διότι τὰ πολυπλάσια τινὸς ἀριθμοῦ κυρίως εἶναι τὰ γινόμενα αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἑτέρου τινὸς παράγοντος.

Β΄. Ἀρχή. Πᾶς κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Τῷ ὄντι ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὅλου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μερικῶν πηλίκων, ταῦτα δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῆς προτεινομένης ἀρχῆς εἶναι ἀκέραια, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὅλου, πρέπει νὰ ἦναι ἀκέραιον, καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀκριβῶν διαιρετέων διά τινος διαιρέτου διαιρεῖται καὶ αὐτὸ διὰ τοῦ ἰδίου διαιρέτου.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 12, διαιρῶν ἀκριβῶς τοὺς δύο ἀριθμοὺς 48 καὶ 60, καὶ δίδων πηλίκα 4 καὶ 5, διαιρεῖ ὡσαύτως καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 108 καὶ δίδει διὰ πηλίκον 9 τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πηλίκων 4 καὶ 5.

Γ΄. Ἀρχή. Πᾶς ἀριθμὸς, διαιρῶν ἀκριβῶς τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν καὶ τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἕτερον.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τοῦ ἀθροίσματος ἐξισοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων τῶν δύο προσθετέων ἀριθμῶν, ἓν δὲ τούτων εἶναι ἀκέραιον, ἕπεται ὅτι, ὄντος κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ἀκεραίου τοῦ πηλίκου τοῦ ἀθροίσματος, πρέπει νὰ ἦναι ἀκέραιον καὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἑτέρου προσθετέου· ἐπομένως καὶ ὁ δεύτερος οὗτος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.

Ἔστω π. χ. ὁ 240 θεωρούμενος ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν 75 καὶ 165· ἐπειδὴ ὁ 240 διαιρεῖται διὰ τοῦ 15 καὶ δίδει ἀκέραιον πηλίκον 16, καὶ ὡσαύτως ὁ 75 καὶ δίδει πηλίκον 5, πρέπει καὶ ὁ δεύτερος προσθετέος 165 νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 15, ὡς πραγματικῶς δίδει πηλίκον 11. Διότι ἄλλως ἤθελε προκύψει πηλίκον ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἑνούμενον μετὰ τοῦ ἀκεραίου 5, ἤθελε παράξει κλασματικὸν ἀριθμὸν ἀνάγωγον εἰς ὁλοσχερῆ· καὶ τότε ἠθέλομεν ἐξισώσει μὲ τὸν κλασματικὸν τοῦτον τὸ ἀκέραιον πηλίκον 16 τοῦ ἀριθμοῦ 240, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

93. Ἔσωσαν ἤδη οἱ δύο ἀριθμοὶ 360 καὶ 276, τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην.

Φανερὸν κατὰ πρῶτον, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δὲν πρέπει νὰ ὑπερέχῃ τὸν μικρότερον ἀριθμὸν 276. Ἐξ ὅλων δὲ τῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 276, ὁ μέγιστος εἶναι αὐτὸς ὁ 276· ἵνα ἦναι δὲ ὁ ζητούμενος, ἀρκεῖ νὰ διαιρῇ τὸν 360.

Ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις τοῦ 360 διὰ τοῦ 276 δίδει πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 84, ἄρα ὁ 276 δὲν εἶναι ὁ μ. κ. δ.

Ἔπρεπεν ἤδη νὰ δοκιμάσωμεν διαδοχικῶς ὅλους τοὺς κατὰ μονάδα μικροτέρους ἀριθμοὺς τοῦ 276· οἷον τὸν 275, τὸν 274 κτλ., ἀλλ᾽ ἀντὶ νὰ ἀποπειρώμεθα ἐπὶ τῶν ἀμφιβόλων, συλλογιζόμεθα ὡς ἐφεξῆς.

Ἐπειδὴ πᾶς διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην, πολυπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ πηλίκον, πλέον τοῦ ὑπολοίπου, λοιπὸν καὶ ὁ 360 ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην 276 ἐπὶ τὸ πηλίκον 1 πλέον τοῦ ὑπολοίπου 84, ἤτοι 360 ἴσον μὲ 276 πλέον 84. Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ὁ ζητούμενος μ. κ. δ. πρέπει νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς τὸ ὅλον 360 καὶ ἕνα τῶν προσθετέων τὸν 276, ἄρα κατὰ τὴν τρίτην ἀρχὴν πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἕτερον προσθετέον 84 καὶ ἐπομένως δὲν πρέπει νὰ ἦναι ἀνώτερος τοῦ 84.

Ἀλλ᾽ ἐξ ἑτέρου ὁ μ. κ. δ. τοῦ 276 καὶ 84 πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 360. Ἕπεται ἄρα, ὅτι ὁ μ. κ. δ. τοῦ 360 καὶ 276 εἶναι ὁ αὐτὸς, ὅστις καὶ μεταξὺ τοῦ 276 καὶ 84.

Κατὰ τὸν συλλογισμὸν τοῦτον ἀναζητοῦμεν παρομοίως τὸν μ. κ. δ. μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 276 καὶ 84. Οὕτω λέγομεν, ὁ 84 διαιρεῖ ἑαυτὸν, ἂν διαιρῇ καὶ τὸν 276, τότε αὐτὸς εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν 276 καὶ 84 καὶ ὁ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν 360 καὶ 276.

Δοκιμάζοντες οὕτω τὴν διαίρεσιν τοῦ 276 διὰ τοῦ 84 εὑρίσκομεν πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 24· ὅθεν βεβαιούμεθα, ὅτι ὁ 84 δὲν εἶναι ὁ μ. κ. δ. ἀλλ᾽ ἄλλος τις μικρότερος τοῦ 84. Πρὶν ἀναλάβωμεν δὲ τὴν δοκιμασίαν ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 84, σκεπτόμεθα πάλιν ὡς καὶ ἀνωτέρω.

Ὁ ἀριθμὸς 276 καθὸ διαιρετέος, ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην 84 ἐπὶ τὸ πηλίκον 3, ἤτοι μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ 84, πλέον τοῦ ὑπολοίπου 24. Καὶ ἐπειδὴ ὁ μ. κ. δ. διαιρεῖ μὲν τὸ ὅλον 276 καθὸ ἕνα τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, διαιρεῖ δὲ καὶ τὸν 84, κατὰ τὸν προηγούμενον συλλογισμὸν καὶ ἑπομένως τὸ τριπλάσιον τοῦ 84 κατὰ τὴν πρώτην ἀρχὴν, ἄρα πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἕτερον μέρος 24, τουτέστι τὸ ὑπόλοιπον τῆς δευτέρας διαιρέσεως. Ἐκ τούτου ὁ ζητούμενος μ. κ. δ. δὲν πρέπει νὰ ἦναι ἀνώτερος τοῦ 24.

Ἐξ ἑτέρου δὲ παρατηροῦμεν ὁμοίως, ὅτι ὁ μ. κ. δ. τοῦ 84 καὶ 24 εἶναι καὶ μ. κ. δ. τοῦ 276 καὶ 84· ἐπειδὴ ὁ διαιρῶν τὰ δύο μέρη τοῦ 276, τουτέστι τὸν 24 καὶ τὸ τριπλοῦν τοῦ 84, διαιρεῖ καὶ τὸ ὅλον αὐτῶν 276. Καὶ ἐπειδὴ ὁ μ. κ. δ. τοῦ 276 καὶ 84 εἶναι ὁ αὐτὸς, ὅστις καὶ ὁ μεταξὺ τῶν δεδομένων 360 καὶ 276, ὡς προείρηται, ἄρα ἡ ἀναζήτησις τοῦ ἀγνώστου μ. κ. δ. περιορίζεται μεταξὺ τοῦ 84 καὶ 24.

Διαιροῦντες λοιπὸν τὸν 84 διὰ τοῦ 24 λαμβάνομεν πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 12, ἐξ οὗ πληροφορούμεθα, ὅτι ὁ 24 δὲν εἶναι ὁ μ. κ. δ. ἀλλὰ ἄλλος τις ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 24. Ἐπαναλαμβάνοντες δὲ τὸν αὐτὸν συλλογισμὸν λέγομεν ὡσαύτως, ὅτι ὁ μ. κ. δ. τοῦ 84 καὶ 24 πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον 12, ἢ ὅτι ὁ μ. κ. δ. τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ 24 καὶ τοῦ ὑπολοίπου 12 εἶναι καὶ μ. κ. δ. τοῦ 84 καὶ 24 καὶ κατὰ τὸν προλαβόντα συλλογισμὸν ὁ ζητούμενος μεταξὺ τοῦ 360 καὶ 276.

Διὰ τοῦτο διαιροῦντες τέλος τὸν 24 διὰ τοῦ 12 εὑρίσκομεν πηλίκον 2 ἄνευ ὑπολοίπου· ὅθεν ὁ 12 εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν 24 καὶ 12 καὶ ἑπομένως ὁ τῶν 84 καὶ 24, ἐπίσης δὲ ὁ τῶν 276 καὶ 84, καὶ τέλος ὁ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν 360 καὶ 276.

Ἰδοὺ πῶς διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ταύτην.

	1	3	3	2
360	]276	]84	]24	]12
84	24	12	0	

Γράφομεν τὸν διαιρέτην 276 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου 360· ἄνω τοῦ διαιρέτου γράφομεν τὸ πηλίκον 1· διὰ δὲ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου 84 διαιροῦμεν τὸν πρότερον διαιρέτην 276 καὶ τὸ πηλίκον 3 γράφομεν ὡσαύτως ὑπεράνω τοῦ διαιρέτου 84. Ὁμοίως διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον 84 διὰ τοῦ δευτέρου 24 καὶ λαμβάνομεν πηλίκον 3, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπεράνω τοῦ διαιρέτου, καὶ τέλος διαιροῦμεν τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον 24 διὰ τοῦ τρίτου 12 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 ἄνευ ὑπολοίπου· ὅθεν παύομεν τὴν πρᾶξιν.

94. Ἡ σειρὰ τῶν ἀνωτέρω συλλογισμῶν καθολικευομένη εἰς δύο οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς ἐπικυροῖ ἤδη τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

Ἵνα εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μεγαλήτερον διὰ τοῦ μικροτέρου, καὶ ἂν μὲν διαιρῆται ἀκριβῶς, τότε ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μ. κ. δ,. εἰδὲ καὶ μείνῃ ὑπόλοιπον, τότε διὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου διαιροῦμεν τὸν μικρότερον, καὶ ἂν μὲν ἡ διαίρεσις ἐκτελῆται ἀκριβῶς, τότε τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἶναι ὁ μ. κ. δ., ἄλλως δὲ ἐξακολουθοῦμεν νὰ διαιρῶμεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον διὰ τοῦ δευτέρου καὶ ὁμοίως τὸ δεύτερον διὰ τοῦ τρίτου καὶ ἐφεξῆς. ἕως ὅτου ἓν τῶν ὑπολοίπων νὰ διαιρέσῃ ἀκριβῶς τὸ πρὸ αὐτοῦ, καὶ τότε τὸ τελευταῖον τοῦτο ὑπόλοιπον εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ. τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.

95. Ἐπανερχόμενοι ἤδη εἰς τὸν πρῶτον σκοπὸν, ἐξ οὗ ὡρμήθημεν εἰς τὴν ἀνωτέρω θεωρίαν, λαμβάνομεν τὸ κλάσμα $\frac{435}{1044}$, τὸ ὁποῖον ζητοῦμεν νὰ τρέψωμεν εἰς τὴν ἁπλουστάτην ἔκφρασιν.

Εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον τὸν μ. κ. δ. μεταξὺ τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος, ὡς δείκνυται εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα.

	2	2	2
1044	| 435	| 174	| 87
174	87	0	

Μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μ. κ. δ. 87. Ὅθεν συνάγομεν τὸ ἁπλούστατον $\frac{5}{12}$.

Παρομοίως τὸ κλάσμα $\frac{592}{999}$ ἄγεται εἰς $\frac{16}{27}$, διαιρουμένων τῶν ὅρων αὐτοῦ διὰ τοῦ μ. κ. δ. 37, καὶ ὁμοίως εἰς ἄλλα.

96. Ἔστω πρὸς τούτοις καὶ τὸ κλάσμα $\frac{317}{873}$, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ἁπλουστάτην ἔκφρασιν.

Ἐφαρμόζοντες καὶ ἐνταῦθα τὴν πρᾶξιν τῆς ἀναζητήσεως τοῦ μ. κ. δ. εὑρίσκομεν ὡς τοιοῦτον τὴν μονάδα, ὅστις εἶναι κοινὸς διαιρέτης παντὸς ἀριθμοῦ.

	2	1	3	15	1	1	2
873	317	239	78	5	3	2	1
239	78	5	3	2	1	0	

Τοῦτο ἀποδεικνύει, ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ 873 καὶ 317 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐπομένως τὸ κλάσμα δὲν δύναται ποσῶς νὰ ἁπλουστευθῇ, καὶ διὰ τοῦτο λέγεται ἀνάγωγον. Τοιοῦτον δὲ πρέπει νὰ ἦναι τὸ ἀποτέλεσμα καὶ εἰς πᾶσαν ἄλλην ὁμοίαν περίστασιν. Διότι, τῶν ὑπολοίπων ἐλαττουμένων βαθμηδὸν, θέλομεν φθάσει τελευταῖον εἰς τὴν μονάδα.

97. Ἀλλὰ καὶ χωρὶς νὰ προχωρήσωμεν τὴν πρᾶξιν μέχρι τῆς τελευταίας διαιρέσεως, ἠδυνάμεθα νὰ προγνωρίσωμεν τὸ ἀνάγωγον τοῦ κλάσματος. Τῷ ὄντι φθάσαντες εἰς τὸ ὑπόλοιπον 5, τὸ ὁποῖον εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς, λέγομεν ἢ τοῦτο πρέπει νὰ ἦναι ὁ μ. κ. δ., τότε δὲ πρέπει νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς τὸ πρὸ αὐτοῦ 78, ἢ ἀδύνατον νὰ ὑπάρξῃ ἄλλος τις ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 5. Διότι ὁ μ. κ. δ. ὀφείλων νὰ διαιρῇ οὐχὶ μόνον τοὺς δύο δεδομένους ἀριθμοὺς, ἀλλὰ καὶ ὅλα τὰ ὑπόλοιπα τῆς συνεχοῦς ταύτης διαιρέσεως, πρέπει ἀναγκαίως νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον 5, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 5 εἶναι πρῶτος.

Καὶ ἐν γένει, ὁσάκις ζητοῦντες τὸ μ. κ. δ. λάβωμεν ὑπόλοιπον, γνωσόν τινα πρῶτον ἀριθμὸν, λέγομεν ἢ τοῦτο πρέπει νὰ ἦναι ὁ μ. κ. δ. καὶ οὕτω δοκιμάζομεν διὰ τῆς διαιρέσεως, ἢ οὐδείς τις ἄλλος· καὶ οὕτως ἀποφεύγομεν τὴν ἐπὶ ματαίῳ ἐξακολούθησιν τῶν ἄλλων διαιρέσεων, βέβαιοι ὄντες, ὅτι προχωροῦντες θέλομεν φθάσει ὡς καὶ ἀνωτέρω, εἰς τὴν μονάδα.

§. δ΄. Περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

ά. Περὶ Προσθέσεως.

98. Ὅταν ἐκ πολλῶν ποσοτήτων πρόκηται νὰ σχηματίσωμεν ἓν ὅλον, πρέπει αἱ ποσότητες αὗται νὰ συντίθενται ἐξ ὁμοειδῶν μερῶν, καὶ τότε τὸ σχηματιζόμενον ὅλον εἶναι ὁμογενὲς, ἢ ἐπιδεκτικὸν καταμετρήσεως διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος. Οὕτως ἐθεωρήσαμεν τοὺς προσθετέους εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων, καὶ ὡσαύτως πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τοὺς ἰδίους καὶ ἐνταῦθα εἰς τὴν τῶν κλασμάτων· τουτέστι τὰ εἰς πρόσθεσιν προκείμενα κλάσματα πρέπει οὐχὶ μόνον νὰ ἦναι μέρη τῆς αὐτῆς μονά-

δος, ἀλλὰ καὶ τῆς αὐτῆς διαιρέσεως, ἤτοι τοῦ αὐτοῦ παρονομαστοῦ. Ὅθεν ἂν τὰ κλάσματα ταῦτα ἦναι ἑτεροειδῆ, τρέπομεν αὐτὰ κατὰ πρῶτον, εἰς ἰσοδύναμα ὁμοειδῆ κατὰ τὸν συσταθέντα κανόνα, καὶ μετὰ ταῦτα ἐπειχειροῦμεν τὴν πρόσθεσιν.

Ἔστωσαν λοιπὸν τὰ προσθετέα κλάσματα $\frac{3}{17}, \frac{4}{17}, \frac{8}{17}$· προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς 3, 4, καὶ 8 καὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 15 δίδομεν τὸν κοινὸν παρονομαστὴν 17 καὶ οὕτω λαμβάνομεν ἐξαγόμενον $\frac{15}{17}$· ἀπαραλλάκτως ὡς 3, 4, καὶ 8 μονάδες οἱουδήποτε εἴδους συνιστῶσι 15 μονάδας τοῦ αὐτοῦ εἴδους.

Ἔστωσαν δὲ καὶ τὰ κλάσματα	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{7}{8}$.
Ταῦτα ἀγόμενα κατὰ πρῶτον εἰς τὸν αὐτὸν παρονο-	8	6	3
μαστήν, τρέπονται εἰς τὰ ἰσοδύναμα ὁμοειδῆ.	$\frac{16}{24}$	$\frac{18}{24}$	$\frac{21}{24}$.

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ἐπειδὴ τὸ ἐξαγόμενον $\frac{55}{24}$ ἐμπεριέχει καὶ ἀκέραιον, διακρίνομεν τὸ ἀκέραιον μέρος, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ἄθροισμα $2\frac{7}{24}$.

99. Ἐὰν δὲ ἔχωμεν ἀκέραια καὶ κλάσματα, τότε προσθέτομεν κατὰ πρῶτον τὰ κλάσματα καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν ἐξάγομεν τὰς ἀκεραίας μονάδας, τὰς ὁποίας προσθέτομεν μετὰ ταῦτα μετὰ τῶν ἀκεραίων.

Ἔστω π. χ. νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς $4\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$, $5\frac{3}{7}$· διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν, ὡς ἕπεται.

		42
$4\frac{1}{2}$	21	21
$2\frac{2}{3}$	14	28
$5\frac{3}{7}$	6	18
$12\frac{25}{42}$		$\frac{67}{42}=1\frac{25}{42}$.

Πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν προσθετέων γράφομεν τὰ γινόμενα 21, 14 καὶ 6 τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων· μετ' αὐτὸ δὲ τοὺς ἀριθμητὰς τῶν ὁμοειδῶν 21, 28, 18, παρονομαστὴς τῶν ὁποίων εἶναι ὁ πρὸς τὰ δεξιὰ ἀριθμὸς 42· λαμβάνομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν 67· οὕτως $\frac{67}{42}$, ἤτοι $1\frac{25}{42}$, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων· γράφομεν μόνον τὸ κλάσμα $\frac{25}{42}$ ὑπὸ τὰ προσθετέα, τὴν δὲ μονάδα μεταφέρομεν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων. Οὕτως ἔχομεν ὁλικὸν ἄθροισμα $12\frac{25}{42}$.

β΄. Περὶ Ἀφαιρέσεως.

100. Ἐπειδὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως ὁ μειωτέος θεωρεῖται ὡς ὅλον τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ τοῦ ὑπολοίπου, οὗτοι δὲ οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ πρέπει νὰ ἦναι ὁμοειδεῖς, διὰ τοῦτο ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν οἱ προκείμενοι εἰς ἀφαίρεσιν κλασματικοὶ ἀριθμοὶ πρέπει νὰ ἦναι τοῦ αὐτοῦ παρονομαστοῦ· ἐπὶ δύο δὲ ὁμοειδῶν κλασματικῶν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν ἀφαιροῦντες ἀριθμητὴν ἀπὸ ἀριθμητοῦ, ὡς ἀφαιρεῖται ἀκέραιος ἀπὸ ἀκεραίου, καὶ δίδοντες παρονομαστὴν τοῦ ὑπολοίπου τὸν κοινὸν παρονομαστὴν τῶν κλασμάτων, τὸν ἐμφαίνοντα ταὐτοχρόνως καὶ τὸ εἶδος τῶν μονάδων τοῦ ὑπολοίπου.

Π. χ. ἂν ἀπὸ τοῦ $\frac{17}{21}$ ἀφαιρέσωμεν $\frac{13}{21}$, λαμβάνομεν ὑπόλοιπον $\frac{4}{21}$.

Ὁμοίως ὁ $\frac{43}{56}$ ἐλαττούμενος κατὰ $\frac{15}{56}$ ἄγεται εἰς $\frac{28}{56}$, καὶ ἁπλούστερον εἰς $\frac{1}{2}$. κτλ.

101. Ἔστωσαν ἤδη κλάσματα ἑτεροειδῆ π. χ. ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{23}{24}$ νὰ ἀφαιρέσωμιν $\frac{5}{6}$.

Ἀντ' αὐτῶν λαμβάνομεν τὰ ἰσοδύναμα ὁμοειδῆ $\frac{23}{24}$ καὶ $\frac{20}{24}$ καὶ ἀφαιροῦντες ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $\frac{3}{24}$, ἤτοι $\frac{1}{8}$.

Ὁμοίως ἀφαιροῦντες $\frac{13}{17}$ ἀπὸ τοῦ $\frac{19}{20}$ λαμβάνομεν ὑπόλοιπον $\frac{63}{340}$ κτλ.

102. Συμβαίνει ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον νὰ ἔχωμεν ἀκέραιον καὶ κλάσμα· τότε ἐκτελοῦμεν κατὰ πρῶτον τὴν ἀφαίρεσιν ἐπὶ τῶν κλασμάτων, ἔπειτα δὲ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων.

				12
Π. χ. ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ	33	$\frac{3}{4}$	9	
νὰ ἀφαιρέσωμεν	17	$\frac{2}{3}$	8	
λαμβάνομεν ὑπόλοιπον	16	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$.	

Ἀλλὰ δυνατὸν τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ κλάσματος τοῦ ἀφαιρετέου. Τότε ὁδηγούμενοι ἀπὸ τὴν αὐτὴν σκέψιν τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἀκεραίων (ἀριθ. 35) δανειζόμεθα μίαν μονάδα ἀπὸ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ μειωτέου, τὴν ὁποίαν ἀναλύοντες εἰς τόσα μέρη, ὅσος εἶναι ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων, συνάπτομεν αὐτὰ μετὰ τοῦ μειωτέου καὶ οὕτως ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν.

					35
Π. χ. ἀπὸ τοῦ	35	$\frac{8}{7}$	15	50	
νὰ ἀφαιρέσωμεν	16	$\frac{4}{5}$	28	28	
	18	$\frac{22}{35}$		$\frac{22}{35}$.	

Δανειζόμενοι μίαν μονάδα ἰσοδύναμον μὲ $\frac{35}{35}$ συνάπτομεν αὐτὴν μετὰ τοῦ μικροτέρου κλάσματος $\frac{15}{35}$ καὶ σχηματίζομεν τὸν $\frac{50}{35}$· ἐκ τούτου ἀφαιροῦμεν ἤδη τὸν $\frac{28}{35}$ καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $\frac{22}{35}$. Ἐφεξῆς δὲ προχωροῦντες εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ ἀκεραίου λέγομεν 16 ἀπὸ 34 ἤ, ὅπερ ταὐτόν, 17 ἀπὸ 35 καὶ λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 18. Ὅθεν 18 $\frac{22}{35}$ εἶναι τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

103. Ἰδοὺ ζήτημα περιέχον πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν.

Τέσσαρες τεχνῖται εἰργάσθησαν 38 πήχεις καὶ $\frac{3}{4}$ καὶ ὁ μὲν πρῶτος εἰργάσθη 5 πήχεις καὶ $\frac{3}{8}$, ὁ δὲ δεύτερος 7 $\frac{1}{2}$ καὶ ὁ τρίτος 9 $\frac{1}{6}$. Ζητεῖται πόσον εἰργάσθη ὁ τέταρτος;

Λύσις.— Φανερὸν, ὅτι τὸ ἔργον τοῦ τετάρτου εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἔργου τῶν τριῶν· ὅθεν πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γνωστῶν, καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸ ἀπὸ τὸ ὅλον ἔργον, ὡς ὑποδεικνύεται εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα.

		24		
$5\frac{3}{8}$	3	9	$38\ \frac{3}{4}$	$6\frac{18}{24}$
$7\frac{1}{2}$	12	12	$22\ \frac{1}{24}$	$1\frac{1}{24}$
$9\frac{1}{6}$	4	4		
$22\frac{1}{24}$	$\frac{25}{24}=1\frac{1}{24}$		16	$\frac{17}{24}$

γ΄. *Περὶ Πολυπλασιασμοῦ.*

104. Εἴπομεν (25, 42), ὅτι νὰ πολυπλασιάσωμεν ἐν γένει ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἕτερον ἀκέραιον ἢ κλασματικὸν, σημαίνει νὰ λάβωμεν τὸν πρῶτον, ἢ πολλοστόν τι μέρος αὐτοῦ, ὁσάκις ἡ μονὰς, ἢ πολλοστόν τι μέρος αὐτῆς, λαμβάνεται εἰς ἀπαρτισμὸν τοῦ δευτέρου. Ὁ οὕτω δὲ σχηματιζόμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον. Σκεπτόμενοι λοιπὸν κατὰ τὸν νοῦν τῆς προτάσεως ἐρχόμεθα νὰ δώσωμεν τὴν λύσιν αὐτῆς εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις.

105. Περίστασις Α΄. — Ἔστω ὁ μὲν πολυπλασιαστέος κλασματικὸς, ὁ δὲ πολυπλασιαστὴς ἀκέραιος, ὡς $\frac{5}{7}$ νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ 8.

Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην κατὰ τὴν ἀποδειχθεῖσαν πρώτην ἀρχὴν (ἀριθ. 82) ἀρκεῖ νὰ πολυπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν 5 τοῦ πολυπλασιαστέου ἐπὶ τὸν ἀκέραιον πολυπλασιαστὴν 8. Οὕτω δὲ λαμβάνομεν γινόμενον $\frac{40}{7}$, ἤτοι 5 $\frac{5}{7}$.

Ὁμοίως $\frac{5}{12}$ πολυπλασιαζόμενον ἐπὶ 15 δίδει γινόμενον $\frac{75}{12}$, ἤτοι 6 $\frac{1}{4}$. κλ.

Πρὸς τούτοις ἐπειδὴ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀρχὴν, διαιρουμένου τοῦ παρονομαστοῦ πολυπλασιάζεται τὸ κλάσμα· δυνάμεθα, ὁσάκις συγχωρεῖται τοιαύτη διαίρεσις, νὰ λάβωμεν οὕτως ἁπλούστερον τὸ γινόμενον, φέρ' εἰπεῖν $\frac{11}{18}$, πολυπλασιαζόμενον ἐπὶ 6, δίδει γινόμενον $\frac{11}{3}$, ἴσον μὲ 3 $\frac{2}{3}$· καὶ ὁμοίως $\frac{41}{48}$ ἐπὶ 8 δίδει $\frac{41}{6}=6\ \frac{5}{6}$. κτλ.

106. Περίστασις Β΄.— Ἔστω τὸ ἀντίστροφον, ὁ μὲν πολυπλασιαστέος ἀκέραιος, ὁ δὲ πολυπλασιαστὴς κλασματικός· ἐξ ὑποθέσεως ὁ 12 νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{4}{7}$.

Ἐνταῦθα ὀφείλομεν νὰ ἀποδώσωμεν ἄλλον λόγον τῆς πράξεως, καίτοι τὸ συναγόμενον συμπέρασμα εἶναι τὸ αὐτό. Σκεπτόμεθα λοιπὸν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ἐπειδὴ ὁ πολυπλασιαστὴς $\frac{4}{7}$ εἶναι τετράκις τὸ ἕβδομον τῆς μονάδος, ἄρα κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολυπλασιασμοῦ πρέπει καὶ τὸ ζητούμενον γινόμενον νὰ ἦναι τετράκις τὸ ἕβδομον τοῦ πολυπλασιαστέου. Κατὰ τοῦτον τὸν λόγον διαιροῦντες τὸν 12 διὰ τοῦ 7 λαμβάνομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἕβδομον τοῦ πολυπλασιαςέου, τὸ ὁποῖον σημειοῦμεν διὰ τοῦ κλασματικοῦ $\frac{12}{7}$. Πολυπλασιάζοντες δὲ αὐτὸ ἔπειτα ἐπὶ 4, κατὰ τὴν ἀνωτέρω περίστασιν, λαμβάνομεν $\frac{48}{7}$, ἤτοι $6\frac{6}{7}$ καὶ οὕτω σχηματίζομεν ἀριθμὸν ἀπὸ τοῦ 12, ὡς σχηματίζεται ὁ $\frac{4}{7}$ ἀπὸ τῆς μονάδος, ἢ ὁ ἀριθμὸς $6\frac{6}{7}$ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 12 ἐπὶ $\frac{4}{7}$.

Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἀκέραιος ἀριθμὸς πολυπλασιάζεται ἐπὶ κλασματικὸν, ὡς καὶ κλασματικὸς ἐπὶ ἀκέραιον καὶ ἑπομένως καθολικεύεται ἡ ἀρχὴ τοῦ ἀριθ. 56· εἰς ἀμφοτέρας δὲ τὰς περιστάσεις ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν πολυπλασιάζοντες τὸν ἀκέραιον παράγοντα ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ. Ἂν δὲ τὸ γινόμενον ἦναι ἀνώτερον τῆς μονάδος ἐξάγομεν τὸ ἀκέραιον μέρος κατὰ τὸν κανόνα (ἀριθ. 81).

Κατὰ τὰ εἰρημένα εὑρίσκομεν ὡσαύτως, ὅτι τὸ γινόμενον 29 ἐπὶ $\frac{7}{8}$ εἶναι $\frac{203}{8}$ τουτέστιν $25\frac{3}{8}$.

Ὁμοίως τὸ γινόμενον τοῦ 24 ἐπὶ $\frac{5}{6}$ εἶναι $\frac{120}{6}$ ἴσον μὲ 20 κτλ.

107. Περίστασις Γ΄.—Ἔστωσαν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες κλασματικοὶ ἐξ ὑποθέσεως $\frac{3}{4}$ νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{5}{8}$.

Ὁ συλλογισμὸς εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τῆς ἀνωτέρω περιστάσεως, πηγάζει δὲ ἀπὸ αὐτὸν τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολυπλασιασμοῦ· οὕτω λέγομεν, ἐπειδὴ ὁ πολυπλασιαστὴς $\frac{5}{8}$ ἐκφράζει τὸ ὄγδοον τῆς ἀρχικῆς μονάδος λαμβανόμενον πεντάκις, πρέπει ἄρα καὶ τὸ γινόμενον νὰ ἦναι τὸ ὄγδοον τοῦ πολυπλασιαστέου λαμβανόμενον πεντάκις· τουτέστιν ὁ πολυπλασιαστέος $\frac{3}{4}$ πρέπει πρότερον νὰ διαιρεθῇ εἰς ὀκτὼ ἴσα μέρη καὶ μετὰ ταῦτα τὸ ὄγδοον αὐτοῦ νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ 5. Ἀλλὰ κλασματικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἀκεραίου, ἐὰν πολυπλασιασθῇ ὁ παρονομαςὴς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον διαιρέτην (ἀριθ. 82). Ἐκ τούτου $\frac{3}{4}$, διαιρούμενον διὰ τοῦ 8 δίδει πηλίκον $\frac{3}{32}$, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ὄγδοον τοῦ πολυπλασιαστέου $\frac{3}{4}$. Τούτου τεθέντος, πολυπλασιάζοντες ἤδη $\frac{3}{32}$ ἐπὶ 5 λαμβάνομεν $\frac{15}{32}$, τουτέστι πεντάκις τὸ ὄγδοον τοῦ πολυπλασιαςέου $\frac{3}{4}$, ὡς ἀπαιτεῖ ὁ πολυπλασιασμὸς τοῦ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ $\frac{5}{8}$. Ὅθεν $\frac{15}{32}$ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Καθολικεύοντες τὸν ἀνωτέρω συλλογισμὸν καὶ δι' ἄλλους κλασματικοὺς ἀριθμοὺς οἱουσδήποτε συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα. Ἵνα πολυπλασιάσωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ κλασματικὸν, πολυπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστὴν, καὶ γράφομεν τὸ δεύτερον γινόμενον παρονομαστὴν τοῦ πρώτου.

Οὕτω τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{7}{12}$ ἐπὶ $\frac{5}{6}$ εὑρίσκεται παρομοίως $\frac{35}{72}$.

Ὡσαύτως $\frac{8}{15}$ ἐπὶ $\frac{3}{4}$ δίδει γινόμενον $\frac{24}{60}$ ἴσον μὲ $\frac{2}{5}$ κτλ.

Σημείωσις.—Εἰς τὰς δύο τελευταίας περιστάσεις τοῦ πολυπλασιασμοῦ, καθ᾽ ἃς ὁ πολυπλασιαστὴς εἶναι κλασματικὸς μικρότερος τῆς μονάδος, τὸ γινόμενον εἶναι μικρότερον τοῦ πολυπλασιαστέου. Ἀλλὰ τοιοῦτον ἔπρεπε καὶ νὰ παραχθῇ. Ἐπειδὴ ἡ πρᾶξις ἀπαιτεῖ πραγματικῶς νὰ λάβωμεν, οὐχὶ πολλάκις τὸν πολυπλασιαστέον, οὐδ᾽ ἅπαξ αὐτὸν, ἀλλὰ μέρος τι τοιοῦτον αὐτοῦ, ὁποῖον ὁ πολυπλασιαστὴς ἔλαβεν ἐκ τῆς μονάδος.

108. Τέλος, ὅταν ὁ εἷς ἢ καὶ οἱ δύο παράγοντες ἦναι ἀκέραιον καὶ κλάσμα, τότε ἀνάγομεν τὸ ἀκέραιον καὶ κλάσμα εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον (ἀριθ. 80) καὶ μετὰ ταῦτα πολυπλασιάζομεν ὡς εἰς μίαν τῶν προηγηθεισῶν τριῶν περιστάσεων· καὶ ἐπειδὴ δὲν ἀπαιτεῖται νὰ φέρωμεν περὶ τούτου νέαν ἀπόδειξιν, διὰ τοῦτο δὲν θεωροῦμεν τὰς περιπτώσεις ταύτας ὡς τόσας ἄλλας περιστάσεις τοῦ πολυπλασιασμοῦ.

Ἔστω π. χ. $15\frac{3}{4}$ νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ 7· ἀγομένου τοῦ πολυπλασιαστέου εἰς τὸν ἰσοδύναμον κλασματικὸν $\frac{63}{4}$, ὁ πολυπλασιασμὸς ἄγεται εἰς τὴν πρώτην περίστασιν. Οὕτως εὑρίσκομεν $\frac{441}{4}$ ἢ $110\frac{1}{4}$ ὡς γινόμενον τοῦ $\frac{63}{4}$ ἐπὶ 7, ἤτοι τοῦ δεδομένου $15\frac{3}{4}$ ἐπὶ 7.

Ὁμοίως 17 νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ $12\frac{2}{3}$ ἄγεται εἰς 17 νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{38}{3}$. Ὅθεν κατὰ τὴν δευτέραν περίστασιν λαμβάνομεν $\frac{646}{3}$ ἤτοι $215\frac{1}{3}$.

Καὶ τέλος $7\frac{3}{4}$ ἐπὶ $5\frac{2}{5}$ ἄγεται εἰς $\frac{31}{4}$ ἐπὶ $\frac{27}{5}$· κατὰ δὲ τὴν τρίτην περίστασιν λαμβάνομεν γινόμενον $\frac{837}{20}$ ἤτοι $41\frac{17}{20}$. Καὶ εἰς τὰ ἄλλα ὁμοίως.

Ἠδυνάμεθα μὲν κατὰ τὰς περιπτώσεις ταύτας νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολυπλασιασμὸν καὶ χωρὶς τῆς ἀγωγῆς τῶν παραγόντων εἰς τοὺς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς, ἀλλ᾽ ἡ πρᾶξις αὐτὴ εἶναι ἐπιπονωτέρα. Συνίσταται δὲ εἰς τὸ νὰ πολυπλασιάσωμεν κατὰ μέρη καὶ νὰ προσθέσωμεν μετὰ ταῦτα τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἔστω π. χ.	$7\frac{3}{4}$		
νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ	$5\frac{2}{5}$		
πολυπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον 7	$35\ \frac{15}{4}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{6}{20}$
καὶ $\frac{3}{4}$ ἑκάτερον ἰδίως ἐπὶ 5 καὶ	$35\ \frac{75}{20}$	$\frac{56}{20}$	$\frac{6}{20}$
λαμβάνομεν $35\ \frac{15}{4}$. Ἐφεξῆς δὲ	$35\ \frac{137}{20}$ ἴσον μὲ $41\frac{17}{20}$.		

πολυπλασιάζομεν τοὺς ἰδίους 7 καὶ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ $\frac{2}{5}$ καὶ λαμβάνομεν $\frac{14}{5}$ καὶ $\frac{6}{20}$· προσθέτοντες δὲ τὰ τέσσαρα ταῦτα μερικὰ γινόμενα εὑρίσκομεν ἐπίσης ὁλικὸν γινόμενον 41 $\frac{17}{20}$, ὡς καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην πρᾶξιν.

δ΄. *Περὶ Διαιρέσεως.*

109. Ἐκ τῶν ἀποδοθέντων τριῶν ὁρισμῶν τῆς διαιρέσεως (ἀριθ. 58) ὁ δυνάμενος νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις ἐν γένει εἶναι, δοθέντος τοῦ γινομένου καὶ ἑνὸς τῶν παραγόντων, νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον παράγοντα. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ἂν τὸ ζητούμενον πηλίκον θεωρηθῇ ὡς ὁ πολυπλασιαστέος, πρέπει τότε ὁ διαιρετέος καθὸ γινόμενον νὰ ἔχῃ τοιαύτην σχέσιν πρὸς τὸ πηλίκον, ὁποίαν ὁ πολυπλασιαστὴς, ἤτοι ὁ δεδομένος διαιρέτης, ἔχει πρὸς τὴν μονάδα. Τουτέστι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι ἡ βάσις, ἐκ τῆς ὁποίας ἐσχηματίσθη ὁ διαιρετέος ἀπαραλλάκτως, ὡς ὁ διαιρέτης ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς μονάδος. Διὰ τῆς ἀναλύσεως ταύτης θέλομεν διευκολύνει ἤδη τὰς σκέψεις ἡμῶν, πῶς ἐκ τοῦ δεδομένου διαιρετέου, ὅστις εἶναι ἀποτέλεσμα, δυνάμεθα νὰ ἐπιστρέψωμεν εἰς τὴν προτέραν βάσιν, ἐξ ἧς παρήχθη, καὶ ἡ ὁποία εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον. Διακρίνομεν δὲ τὴν διαίρεσιν εἰς τὰς ἑξῆς τρεῖς περιστάσεις.

110. Περίστασις Α΄. Ἔστω ὁ μὲν διαιρετέος κλασματικὸς, ὁ δὲ διαιρέτης ἀκέραιος, ἐξ ὑποθέσεως $\frac{11}{12}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 5.

Ἡ περίστασις αὕτη δὲν παρουσιάζει νέαν τινὰ δυσκολίαν. Διότι κατὰ τὰς ἀναπτυχθείσας ἀρχὰς τῶν κλασμάτων (ἀριθ. 82) ἀρκεῖ νὰ πολυπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5 τὸν παρονομαστὴν 12 τοῦ διαιρετέου $\frac{11}{12}$, καὶ τὸ οὕτω προκύπτον κλάσμα $\frac{11}{60}$ εἶναι τὸ πεμπτημόριον τοῦ δεδομένου.

Πρὸς τούτοις, ἂν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν. Προτιμῶμεν μάλιστα τὴν πρᾶξιν ταύτην, διότι λαμβάνομεν καὶ ἁπλούστερον τὸ πηλίκον.

Π. χ. $\frac{12}{17}$ διαιρούμενον διὰ τοῦ 4 δίδει πηλίκον $\frac{3}{17}$, ἁπλούστερον τοῦ ἰσοδυνάμου $\frac{12}{68}$, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν πολυπλασιάζοντες τὸν παρονομαστὴν 17 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4.

111. Περίστασις Β΄. Ἔστω ἀκέραιος διαιρετέος νὰ διαιρεθῇ διὰ κλασματικοῦ διαιρέτου· π. χ. ὁ 7 διὰ τοῦ $\frac{5}{8}$.

Ἐνταῦθα ἔχοντες πρὸ ὀφθαλμῶν τὴν προηγηθεῖσαν ἀνάλυσιν, σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως. Τὸ πηλίκον πολυπλασιαζόμενον ἐπὶ $\frac{5}{8}$ παράγει γινόμενον 7. Ἐπειδὴ δὲ ὁ πολυπλασιασμὸς τοῦ πηλίκου ἐπὶ $\frac{5}{8}$ σημαίνει, ὅτι ἐλάβομεν πεντάκις τὸ ὄγδοον αὐτοῦ, ἄρα ὁ διαιρετέος 7 εἶναι τὸ πενταπλάσιον τοῦ ὀγδόου τοῦ πηλίκου· ἑπομένως ἂν διαιρέσωμεν τὸν 7 διὰ τοῦ 5, τὸ ἐξαγόμενον $\frac{5}{7}$ εἶναι τὸ ὄγδοον τοῦ ζητουμένου πηλίκου. Γνωρίσαντες ἤδη τὸ μέρος, ἓν ὄγδοον, μεταβαίνομεν εὐκόλως εἰς τὸ ὅλον πηλίκον· οὕτω λέγομεν $\frac{7}{5}$ εἶναι ἓν ἐκ τῶν ὀκτὼ ἴσων μερῶν, ἤτοι τὸ ὄγδοον τοῦ πηλίκου. Ἵνα εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ὅλον, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ σύνολον τῶν μερῶν αὐτοῦ, τουτέστι νὰ πολυπλασιάσωμεν τὸ γνωστὸν ἤδη ὄγδοον ἐπὶ 8· οὕτω λοιπὸν $\frac{7}{5}$ ἐπὶ 8 δίδει γινόμενον $\frac{56}{5}$, ἴσον μὲ 11 $\frac{1}{5}$, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον. Ὅθεν ἐξάγεται ὁ κανών.

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀκέραιον διὰ κλασματικοῦ, πολυπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον διαιρετέον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρέτου, καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ· ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ πολυπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν οὕτως ἀντεστραμμένον κλασματικὸν διαιρέτην.

112. Περίστασις Γ΄. Ἔστωσαν κλασματικοὶ ὅ τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης π. χ. $\frac{3}{5}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ $\frac{7}{8}$.

Ἐπαναλαμβάνοντες καὶ ἐνταῦθα τὸν αὐτὸν συλλογισμόν, λέγομεν, ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης $\frac{7}{8}$ ἐκφράζει ἑπτάκις τὸ ὄγδοον τῆς μονάδος, ἄρα καὶ ὁ διαιρετέος $\frac{3}{5}$, ὡς γινόμενον τοῦ ἀγνώστου πηλίκου ἐπὶ $\frac{7}{8}$· εἶναι ἑπτάκις τὸ ὄγδοον τοῦ πηλίκου. Ἵνα εὕρωμεν λοιπὸν κατὰ πρῶτον τὸ ἓν ὄγδοον τοῦ πηλίκου, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἑπταπλάσιον αὐτοῦ $\frac{3}{5}$ διὰ τοῦ 7. Ὅθεν κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρώτην περίστασιν πολυπλασιάζοντες τὸν παρονομαστὴν 5 τοῦ διαιρετέου ἐπὶ 7 συνάγομεν πηλίκον $\frac{3}{35}$ καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ὄγδοον τοῦ ζητουμένου πηλίκου. Ἵνα μεταβῶμεν ἤδη ἀπὸ τοῦ γνωστοῦ τούτου ὀγδόου μέρους εἰς τὸ ἀκέραιον πηλίκον, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ ὄγδοον τοῦτο ὀκτάκις, τουτέστι νὰ πολυπλασιάσωμεν τὸν $\frac{3}{35}$ ἐπὶ 8. Διὰ τοῦτο πολυπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν 3 ἐπὶ 8 καὶ λαμβάνομεν γινόμενον $\frac{24}{35}$, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Τὸ τελικὸν συμπέρασμα τοῦ ἀνωτέρω συλλογισμοῦ ἀποτελεῖ τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ἵνα διαιρέσωμεν κλασματικὸν διαιρετέον διὰ κλασματικοῦ διαιρέτου, πρέπει νὰ πολυπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρέτου καὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρέτου, καὶ νὰ γράψωμεν τὸ δεύτερον γινόμενον παρονομαςὴν τοῦ πρώτου· ἢ ἁπλούςερον, ἀντιστρέφοντες τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου πολυπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν διαιρέτην οὕτως ἀντεςραμμένον.

Ἐκ τούτου $\frac{3}{4}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ $\frac{5}{7}$ ἄγεται εἰς τὸν πολυπλασιασμὸν τοῦ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ $\frac{7}{5}$· ὅθεν εὑρίσκομεν $\frac{21}{20}$, ἴσον μὲ 1 $\frac{1}{20}$ διὰ τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ὁμοίως $\frac{23}{30}$ διὰ τοῦ $\frac{13}{15}$ ἰσοῦται μὲ $\frac{23}{30}$ ἐπὶ $\frac{15}{13}$· ὅθεν $\frac{345}{390}$ ἤτοι $\frac{23}{26}$ εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον κτλ.

113. Σημ. Παρατηροῦμεν εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα, ὅτι ὁσάκις ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα, τὸ συναγόμενον πηλίκον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου. Τοιοῦτον δὲ πρέπει νὰ ἦναι καὶ πραγματικῶς. Ἐπειδὴ εἰς τὴν περίστασιν ταύτην μέρος τι τοῦ πηλίκου, σημειούμενον ὑπὸ τοῦ διαιρέτου, οὐχὶ δὲ ἀκέραιον τὸ πηλίκον, συνίστησι τὸν διαιρετέον.

114. Τέλος, ἂν ὁ εἷς, ἢ καὶ οἱ δύο ὅροι τῆς διαιρέσεως ἦναι ἀκέραιον ἡνωμένον μὲ κλάσμα, τότε συμπτύσσομεν τὸ ἀκέραιον καὶ τὸ κλάσμα ἑκατέρου ὅρου εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς ἀριθμοὺς, καὶ μετὰ ταῦτα ἐφαρμόζομεν ἐπ' αὐτῶν τὴν διαίρεσιν κατὰ μίαν τῶν προειρημένων τριῶν περιπτώσεων.

Π. χ. 13 $\frac{3}{4}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 5 ἄγεται εἰς $\frac{55}{4}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 5. Οὕτως ἔχομεν $\frac{55}{20}$ ἤτοι 2 $\frac{3}{4}$ κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν.

Ὁμοίως 11 διὰ τοῦ 3 $\frac{4}{5}$ ἄγεται εἰς 11 διὰ τοῦ $\frac{19}{5}$, καὶ ἐπομένως λαμβάνομεν πηλίκον $\frac{55}{19}$ ἴσον μὲ 2 $\frac{17}{19}$ κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν.

Καὶ τέλος 23 $\frac{7}{8}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 5 $\frac{2}{3}$ ἄγεται εἰς τὴν τρίτην περίπτωσιν, οἷον $\frac{191}{8}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ $\frac{17}{3}$· ὅθεν εὑρίσκομεν πηλίκον $\frac{573}{136}$ ἤτοι 4 $\frac{29}{136}$.

115. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω κανόνων τοῦ πολυπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως φέρομεν ἤδη καὶ τὰ ἑξῆς ζητήματα.

Ζήτημα Α΄.—Ταχυδρόμος, περιπατῶν 2 $\frac{3}{5}$ ςάδια τὴν ὥραν, πόσον θέλει διανύσει εἰς 8 $\frac{3}{4}$ ὥρας;

Φανερὸν, ὅτι θέλει διανύσει μὲν ὀκτάκις τὰ 2 $\frac{3}{5}$ διὰ τὰς 8 ὥρας, περιπλέον δὲ τρὶς τὸ τέταρτον τῶν 2 $\frac{3}{5}$ διὰ τὰ τρία τέταρτα τῆς ὥρας· ἄρα πρέπει νὰ πολυπλασιασθῇ ὁ 2 $\frac{3}{5}$ ἐπὶ 8 $\frac{3}{4}$, ἤτοι ὁ $\frac{13}{5}$ ἐπὶ $\frac{35}{4}$. Οὕτω λαμβάνομεν διὰ λύσιν τὸ ἐξαγόμενον $\frac{455}{20}$ τουτέστι 22 $\frac{3}{4}$.

Ὡς βάσανον δὲ τῆς πράξεως δυνάμεθα μὲν νὰ μεταχειρισθῶμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ γινομένου 22 $\frac{3}{4}$ δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων, ἐξ ὑποθέσεως τοῦ 2 $\frac{3}{5}$, καὶ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον παράγοντα 8 $\frac{3}{4}$. Ἀλλ' εἶναι ἁπλούστερον (ἀριθ. 77) νὰ διπλασιάσωμεν τὸν πολυπλασιαστέον 2 $\frac{3}{5}$ καὶ τὸ διπλοῦν αὐτοῦ $\frac{26}{5}$ νὰ πολυπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ πολυπλασιαστοῦ 8 $\frac{3}{4}$ τουτέστιν ἐπὶ $\frac{35}{8}$· οὕτω δὲ λαμβάνομεν ἐπίσης γινόμενον $\frac{910}{40}$ ἴσον 22 $\frac{3}{4}$.

Ζήτημα Β΄.—Διὰ μιᾶς στροφῆς τοῦ ἕλικος σῶμά τι πιέζεται κατὰ $\frac{3}{5}$ τῆς γραμμῆς, διὰ πόσων στροφῶν θέλει πιεσθῇ κατὰ γραμμὰς 3 $\frac{1}{4}$;

Εἶναι φανερὸν, ὅτι $\frac{3}{5}$ τῆς γραμμῆς λαμβανόμενον τοσάκις, ὅσος εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν στροφῶν τοῦ ἕλικος, πρέπει νὰ παράγῃ 3 $\frac{1}{4}$· ἄρα 3 $\frac{1}{4}$, καθὸ γινόμενον, διαιρούμενον διὰ τοῦ γνωστοῦ παράγοντος $\frac{3}{5}$, προσδιορίζει τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν στροφῶν.

Ὅθεν 3 $\frac{1}{4}$ ἤτοι $\frac{13}{4}$ διὰ τοῦ $\frac{3}{5}$ δίδει πηλίκον $\frac{65}{12}$ ἴσον μὲ 5 $\frac{5}{12}$, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς ἀναλογούσας στροφὰς τοῦ ἕλικος. Ἡ βάσανος τῆς πράξεως ἐκτελεῖται ὡς καὶ ἀνωτέρω.

Ζήτημα Γ'.—Ἀντηλλάξαμεν πήχεις ὑφάσματος $12\frac{3}{8}$ ἀντὶ $13\frac{3}{4}$ ἑτέρου κατωτέρας ποιότητος. Ζητεῖται διὰ ἕνα πῆχυν τοῦ τῆς δευτέρας ποιότητος πόσον μῆκος ἐδώκαμεν ἐκ τοῦ τῆς πρώτης;

Ἡ ἀνάλυσις εἶναι ἁπλουστάτη. Ἐπειδὴ τρὶς καὶ δεκάκις τὸ ζητούμενον μῆκος καὶ πλέον τρὶς τὸ τέταρτον αὐτοῦ πρέπει νὰ ἀποτελῇ τοὺς 12 πήχεις καὶ $\frac{3}{8}$· ἄρα πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν $12\frac{3}{8}$ διὰ τοῦ γνωστοῦ παράγοντος $13\frac{3}{4}$. Ὅθεν $12\frac{3}{8}$ διὰ τοῦ $13\frac{3}{4}$, ἢ μᾶλλον $\frac{99}{8}$ διὰ τοῦ $\frac{55}{4}$ δίδει πηλίκον $\frac{396}{440}$ ἤτοι $\frac{36}{40}$ τουτέστιν $\frac{9}{10}$ τοῦ πήχεως τοῦ ὑφάσματος τῆς πρώτης ποιότητος ἔχουσι τὴν ἀξίαν ἑνὸς πήχεως τοῦ τῆς δευτέρας.

§. ε. Περὶ κλασμάτων κλάσματος.

116. Εἴδομεν εἰς τὸν πολυπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων, ὅτι ὁσάκις ὁ πολυπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα, τὸ γινόμενον εἶναι μικρότερον τοῦ πολυπλασιαστέου, εἴτε ἀκεραίου, εἴτε κλασματικοῦ· ἢ ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ τοιούτου πολυπλασιασμοῦ εἶναι κλάσμα τοῦ πολυπλασιαστέου. Λέγομεν διὰ τοῦτο κλάσμα κλάσματος τὸ γινόμενον κλάσματός τινος ἐπὶ ἕτερον κλάσμα.

Οὕτω φέρ' εἰπεῖν τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{7}$ εἶναι κλάσμα τοῦ κλάσματος $\frac{5}{7}$, σημειούμενον διὰ τῆς σχέσεως $\frac{3}{4}$· προσδιορίζεται δὲ, πολυπλασιαζομένου τοῦ $\frac{5}{7}$ ἐπὶ $\frac{3}{4}$· ἐξ οὗ προκύπτει $\frac{15}{28}$.

Ἐπειδὴ ὁ πολυπλασιασμὸς ἔχει σκοπὸν νὰ συνθέσῃ τρίτον ἀριθμὸν ἐξ ἄλλου, ὡς δεύτερός τις συντίθεται ἐκ τῆς μονάδος, κυρίως εἰπεῖν τὰ κλάσματα κλασμάτων καὶ ἐν γένει τὰ γινόμενα οἱουδήποτε πολυπλασιασμοῦ ἠδύναντο νὰ ἦναι γνωστοὶ ἀριθμοὶ καὶ διὰ μόνης τῆς ὑπὸ τοῦ πολυπλασιαστοῦ ἐκφωνουμένης σχέσεως, ἂν ὁ νοῦς ἀντελαμβάνετο τὸν σχηματισμὸν αὐτῶν ἀπὸ τοὺς δεδομένους πολυπλασιαστέους μὲ τὴν αὐτὴν εὐμάθειαν, μὲ τὴν ὁποίαν ἀντιλαμβάνεται τοὺς ἀμέσως ἀναφερομένους πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα κατὰ τὸν τρόπον τῆς ἀριθμήσεως. Οὕτω τὸ ζήτημα τοῦ πολυπλασιασμοῦ συνίσταται, ὡς εἴδομεν, εἰς τὸ νὰ τρέψωμεν ἀριθμόν τινα, σχηματιζόμενον ἐξ ἑτέρου, εἰς ἰσοδύναμον ἐκ τῶν ἐχόντων ἄμεσον ἀναφορὰν πρὸς τὴν μονάδα.

Προκειμένου ἤδη νὰ παραστήσωμεν, ὅτι ἀριθμός τις εἶναι κλάσμα κλάσματος ἑτέρου κλάσματος τῆς ἀρχικῆς μονάδος· ὡς φέρ' εἰπεῖν τὰ $\frac{9}{11}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{7}$, τότε ὁ ἀριθμὸς οὗτος, προσδιοριζόμενος διὰ τοσούτων πλαγίων σχέσεων ἀποβαίνει ἔτι πλέον δυσκατάληπτος. Ἀλλ' εἶναι εὔκολον νὰ ἐκτιμήσωμεν αὐτὸν πρὸς ἄλλον, ἔχοντα ἄμεσον σχέσιν πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, καὶ οὕτω νὰ λάβωμεν προχείρως τὴν ἰδέαν αὐτοῦ. Σκεπτόμεθα δὲ ὡς ἀκολούθως. Ἐπειδὴ τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{7}$ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ $\frac{5}{7}$ ἤτοι $\frac{15}{28}$, ἄρα εἴτε τὰ $\frac{9}{11}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{7}$, εἴτε τὰ $\frac{9}{11}$ τῶν $\frac{15}{28}$, εἶναι φράσεις ἰσοδύναμοι. Ἀλλὰ καὶ τὰ $\frac{9}{11}$ τῶν $\frac{15}{28}$ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι ἐπίσης τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{9}{11}$ ἐπὶ $\frac{15}{28}$, ἤτοι $\frac{135}{308}$, ἄρα ὁ πρώην ἐμμέσως πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα ἀναφερόμενος ἀριθμὸς $\frac{9}{11}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{7}$ τῆς μονάδος ἰσοῦται μὲ τὸ κλάσμα $\frac{135}{308}$, τοῦ ὁποίου ἡ σχέσις πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα εἶναι ἤδη ἁπλῆ καὶ σαφής, ὡς καὶ παντὸς κλασματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ὁ ἀνωτέρω συλλογισμός, ὅστις παρομοίως δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ εἰς ἄλλα κλάσματα πολὺ πλέον συνθετώτερα, ἄγεται ἄρα εἰς τὸ ἑξῆς συμπέρασμα. Ἵνα τρέψωμεν κλάσματα κλασμάτων εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν ἔχοντα ἄμεσον λόγον πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, πρέπει διαδοχικῶς νὰ πολυπλασιάσωμεν τὰ κλάσματα ταῦτα πρὸς ἄλληλα κατὰ τοὺς συσταθέντας κανόνας.

Πρόβλημα.—Μαθηματικὸς πρὸς τὸν ἐρωτήσαντα, ποία ὥρα ἦτον ἀπεκρίθη· τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{6}$ τῶν $\frac{7}{12}$ τῶν $\frac{6}{7}$ τῶν 24 ὡρῶν· τίνα ὥραν προσδιώριζεν ὁ μαθηματικός;

Πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ ζητήματος πρέπει νὰ πολυπλασιάσωμεν διαδοχικῶς τὰ κλάσματα ταῦτα, ἔτι δὲ καὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 24· οὕτως οἱ μὲν ἀριθμηταὶ 3, 5, 7, 6 καὶ ὁ ἀκέραιος 24, δίδουσι γινόμενον 15120, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ζητουμένου, οἱ δὲ παρονομασταὶ 4, 6, 12 καὶ 7 δίδουσι γινόμενον τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ 2016. Ἄρα $\frac{15120}{2016}$, ἢ μᾶλλον 7 $\frac{1}{2}$ ὧραι εἶναι ἡ λύσις τοῦ προβλήματος.

Παρατηροῦμεν ὅμως εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὡς καὶ εἰς ἄλλα ὅμοια, ὅτι συμφέρει μᾶλλον νὰ παριστάνωμεν μόνον τοὺς πολυπλασιασμοὺς τῶν ἀριθμητῶν καὶ τῶν παρονομαστῶν. Διότι οὕτως εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ἐξαλείφωμεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας τῶν δύο ὅρων καὶ ἐπομένως νὰ συντέμνωμεν τὴν πρᾶξιν· π. χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, ἀντὶ νὰ πολυπλασιάσωμεν 3 ἐπὶ 5 ἐπὶ 7 ἐπὶ 6 καὶ ἐπὶ 24, τὸ δὲ γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ 4 ἐπὶ 6 ἐπὶ 12 καὶ ἐπὶ 7· ἀπαλείφοντες, τοὺς κοινοὺς παράγοντας, 7, 6 καὶ 12 τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοὺς ὁμοίους τοῦ παρονομαστοῦ, ἄγομεν τὴν πρᾶξιν εἰς ἁπλῆν τὴν διαίρεσιν τοῦ 15 διὰ τοῦ 2· οὕτω $\frac{15}{2}$ ἴσον μὲ 7 $\frac{1}{2}$ εἶναι τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον ὡς καὶ ἀνωτέρω.

Ὡσαύτως εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς μονάδος ἰσοῦνται μὲ $\frac{6}{12}$ ἤτοι τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ἰδίας.

Καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $\frac{1}{5}$ ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{15}$ κτλ.

117. *Γενικὴ παρατήρησις ἐπὶ τῶν κλασμάτων.*—Ἐξ ὅσων ἀνεφέρα-

μεν περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν κλασματικῶν, παρατηροῦμεν ἐν γένει, ὅτι αἱ τέσσαρες ἀρχικαὶ πράξεις, τουτέστι πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολυπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις ἐκτελοῦνται καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων. Οὕτως ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις μετὰ τὴν ἀγωγὴν τῶν προσθετέων κλασματικῶν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἄγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν ἢ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀριθμητῶν. Καὶ ὁμοίως ὁ πολυπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἄγονται εἰς ἁπλοῦν πολυπλασιασμὸν τῶν ὅρων, ὡς ἀκεραίων παραγόντων. Ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι αἱ συσταθεῖσαι ἀρχαὶ ἐπὶ τοῦ πολυπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἔχουσι χώραν ἐπίσης καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν· ά. τὸ γινόμενον κλασματικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ πολυπλασιαστὴν, ὄντα ὡσαύτως κλασματικὸν καὶ γινόμενον δύο ἢ πλειόνων παραγόντων, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πολυπλασιαστέου τούτου, πολυπλασιαζομένου διαδοχικῶς ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων, καὶ ϐ'. ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἢ πλειόνων κλασματικῶν παραγόντων εἶναι τὸ αὐτὸ, καθ' οἵαν τινὰ τάξιν λάϐωμεν τοὺς παράγοντας.

Τέλος δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν τὰς προτάσεις τοῦ ἀριθ. 77 τὰς ἀφορώσας τὴν μεταϐολὴν, ὁποίας εἶναι ἐπιδεκτικὸν τὸ γινόμενον τοῦ πολυπλασιασμοῦ, ἢ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως, ὅταν μεταϐάλωμεν τὸν ἕνα ἢ τοὺς δύο ὅρους τῆς προκειμένης πράξεως διὰ πολυπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ τῶν Συμμιγῶν ἀριθμῶν.

§. ά. Εἰσαγωγή.

118. Καλεῖται ἀριθμὸς συμμιγὴς ὁ συγκροτούμενος ἐκ μονάδων διαφόρου μεγέθους, ἢ μᾶλλον ὁ περιέχων μονάδας καὶ διαιρέσεις καὶ ὑποδιαιρέσεις τῆς ἀνωτέρας μονάδος· οἷον 4 λίραι, 7 σελλίνια, 11 δηνάρια. Ὁμοίως 7 λίτραι, 1 ἡμίλιτρον, 5 οὐγγίαι, 7 δραχμαὶ κτλ.

Συγκεκριμένος δέ τις ἀριθμὸς, συνιστάμενος ἐκ μονάδων ἑνός τινος εἴδους, λέγεται ἀμιγὴς, οἷον 52 ὧραι· 63 ὀργυιαί· 13 δραχμαὶ κτλ.

Τὸ κεφάλαιον τοῦτο κυρίως εἶναι μερικὴ περίστασις τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν κλασμάτων. Καθότι τὰ μέρη τῆς ἀρχικῆς μονάδος θεωροῦνται μὲν καὶ αὐτὰ ὡς μονάδες, ἀλλὰ σχετικῶς πρὸς τὰς πρώτας εἶναι πάντοτε κλάσματα· οἷον ὁ μὴν εἶναι τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἐνιαυτοῦ, τὸ λεπτὸν εἶναι τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας κτλ. ὥστε οἱ ἀποδοθέντες γενικοὶ κανόνες τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν κλασμάτων ἐφαρμόζονται ὡσαύτως καὶ ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἀριθμητικῶν ζητημάτων δίδονται πάντοτε συγκεκριμένοι, συχνάκις δὲ συμμιγεῖς ἀριθμοί, διὰ τοῦτο συμφέρει νὰ γνωρίζωμεν εἰδικωτέρους τινὰς τρόπους τοῦ ὑπολογισμοῦ αὐτῶν, περὶ τῶν ὁποίων ἐνταῦθα διαλαμβάνομεν.

Εἶναι ἀληθές, ὅτι ἡ ἀξία τῆς θεωρίας τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν ἠλαττώθη πολύ, ἀφ᾽ ὅτου πολλαὶ Κυβερνήσεις παρεδέχθησαν τὸ δεκαδικὸν σύστημα. Ἀλλὰ πάντοτε θεωρεῖται ἀναγκαία· καὶ διότι ὑπάρχουσι πολλὰ τοιαύτης ἀνωμάλου ὑποδιαιρέσεως μετρολογικὰ συστήματα, καὶ διότι διὰ τῶν ἐκτεθησομένων μεθόδων τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν συμμιγῶν οἰκειούμεθα μὲ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀριθμῶν ἐν γένει.

119. Ἐπειδὴ ἅπασαι αἱ εἰδικότητες τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν συμμιγῶν πηγάζουσιν ἐκ τῶν ὡρισμένων διαιρέσεων τῆς ἀρχικῆς μονάδος τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου συστήματος, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν διαίρεσιν καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις ἑκάστης ἀρχικῆς μονάδος. Πρὸς τοῦτο ὑπάρχουσι πίνακες μετρολογικοί, τοὺς ὁποίους δὲν δυνάμεθα βεβαίως νὰ καταχωρίσωμεν. Ἀλλ᾽ ἐκ τοῦ ἀγγλικοῦ μετρολογικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον ἐκρίναμεν νὰ ἐκθέσωμεν πρὸς ὑπόδειγμα τῶν κανόνων, δυνάμεθα νὰ συνάξωμεν γενικὴν ἰδέαν, πῶς πρέπει νὰ ὁδηγώμεθα καὶ εἰς πάντα ὅμοιον ἀριθμόν, ἅμα γνωρίσωμεν τὸν σύνδεσμον τῆς ἀρχικῆς μονάδος πρὸς τὰ μέρη αὐτῆς.

Ἡ Ἀγγλικὴ Κυβέρνησις, κατὰ τῆς θρησκείας μόνον τολμήσασα, θρησκευτικῶς δὲ ἐμμένουσα εἰς τὸν ἀρχαϊσμὸν αὐτῆς, καὶ ἀποφεύγουσα τὰς καινοτομίας, διατηρεῖ εἰσέτι τὸ ἑξῆς ἀρχαιότατον σύστημα, παρέχουσα εἰς τὴν λογιστικότητα πολλὰς δυσκολίας, τὰς ὁποίας ἠδύνατο νὰ ἀποφύγῃ διὰ τῆς παραδοχῆς τοῦ δεκαδικοῦ, ὡς θέλομεν ἰδεῖ εἰς τὸ ἑξῆς κεφάλαιον.

§. 6΄. Μετρολογικὸν σύστημα τῆς Ἀγγλίας.

Μονάδες νομισμάτων.

120. Μέχρι τοῦ 1818 ἔτους ἀρχικὴ μονὰς νομισμάτων ὑπῆρχεν ἡ Γυϊνέα (Guinée) ἐκ χρυσοῦ, ἕλκουσα βάρος γραμμὰς γαλλικὰς 8 $\frac{38}{100}$ ὑπὸ ὅρον καθαρότητος 917 χιλιοστημορίων καθαροῦ χρυσοῦ πρὸς 83 χαλκοῦ.

Ὑποδιῃρεῖτο δὲ εἰς τέσσαρας κορώνας (crown) καὶ ἡ κορώνα εἰς 5 σελλίνια (Shilling).

Κατὰ δὲ τὸ 1818 ἐγένετο μεταῤῥύθμισις καὶ ἀντὶ τῆς Γυϊνέας ἐκόπη ἡ σήμερον κοινῶς λεγομένη ἀγγλικὴ λίρα (**Souverain**), ἕλκουσα βάρος γράμμα γαλλικὰ 7 καὶ $\frac{98}{100}$ ὑπὸ τὸν αὐτὸν ὅρον τῆς καθαρότητος, ὡς τὸν τῆς Γυϊνέας.

Καὶ διαιρεῖται μὲν ὡσαύτως εἰς 4 κορώνας ἡ δὲ κορώνα εἰς 5 σελλίνια, ἀλλ' ἀναλόγως μικρότερα.

Τὸ δὲ σελλίνιον ὑποδιαιρεῖται εἰς 12 δηνάρια (**penny**) καὶ τὸ δηνάριον εἰς 4 φαρδίνια (**farding**).

Ἀλλὰ διὰ τὴν εὐκολίαν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ ἄμεσος διαίρεσις τῆς λίρας εἰς κορώνας, εἰμὴ ἡ ὑποδιαίρεσις αὐτῆς εἰς σελλίνια καὶ δηνάρια. Οὕτως ἡ λίρα ἰσοῦται μὲ 20 σελλίνια ἢ 240 δηνάρια ἢ 960 φαρδίνια καὶ τὸ ἀνάπαλιν τὸ φαρδίνιον εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ δηναρίου, ἢ τὸ $\frac{1}{48}$ τοῦ σελλινίου, ἢ τὸ $\frac{1}{960}$ τῆς λίρας· ὁμοίως τὸ δηνάριον εἶναι τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ σελλινίου ἢ τὸ $\frac{1}{240}$ τῆς λίρας· καὶ τέλος τὸ σελλίνιον εἶναι τὸ $\frac{1}{20}$ τῆς λίρας.

Μέτρα ὁδοιπορικά.

Μίλλιον συνιστάμενον ἐκ 5280 ἀγγλικῶν ποδῶν ἰσοδυναμεῖ μὲ 1609 Βασιλικοὺς Ἑλληνικοὺς πήχεις καὶ διαιρεῖται εἰς 8 στάδια· τὸ δὲ στάδιον ὑποδιαιρεῖται εἰς 40 πόλα (**poles**). Εἰς ἕκαστον πόλον ἀναλογοῦσι πόδες $16\frac{1}{2}$· ἀλλὰ δὲν προάγεται περαιτέρω ἡ ὑποδιαίρεσις, εἰμὴ εἰς ἡμίση, τέταρτα κτλ.

Μέτρα Μήκους.

Διὰ τὰ μικρὰ μήκη εἰς τὰς τέχνας καὶ τὸ ἐμπόριον ἀρχικὴ μονὰς κυρίως μὲν εἶναι ἡ ἀρχαία Ἑλληνικὴ ὀργυιά, ἔχουσα ἓξ πόδας, ἢ 4 ἀρχαίους πήχεις, καὶ λέγεται ὑπὸ τῶν ἄγγλων **fathom**· ἀλλὰ ἐν χρήσει λαμβάνεται τὸ ἥμισυ αὐτῆς, ἡ υἱάρδα (**yard**), διαιρουμένη εἰς 3 πόδας. Ὁ δὲ ποῦς, ἄλλοτε μὲν διηρεῖτο εἰς 4 παλάμας, ἑκάςη δὲ παλάμη εἰς 4 δακτύλους· ἀλλὰ μετὰ ταῦτα ἐπεκράτησεν ἡ διαίρεσις τοῦ μὲν ποδὸς εἰς 12 δακτύλους, ἑκάςου δὲ δακτύλου εἰς 12 γραμμάς. Τελευταῖον δὲ διαιροῦσι συνήθως τὸν πόδα εἰς 12 δακτύλους, τὸν δὲ δάκτυλον εἰς δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις.

Ἡ υἱάρδα, ὡς μονὰς τῶν ὑφασμάτων, διαιρεῖται εἰς ἡμίση, τέταρτα, ὄγδοα, κτλ.

Μέτρα ἐπιφανειῶν.

Ἀρχικὴ μονὰς εἶναι τὸ τετραγωνικὸν πόλον, διαιρούμενον εἰς ἡμίση, τέταρτα κτλ. ἢ εἰς δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις.

Ἐκ ταύτης σχηματίζεται τὸ Ῥοῦδον (rood) ἐκ 40 πόλων, τὸ ὁποῖον ἀναλογεῖ πρὸς τὸ ἀρχαῖον ὀλυμπιακὸν πλέθρον. Διότι ἔχει λόγον πρὸς αὐτὸ ὡς 10 πρὸς 9 $\frac{1}{2}$.

Τὸ ἄκρον (acre) ἐκ 4 ῥούδων, ἢ 160 πόλων, τὸ ὁποῖον ἀναλογεῖ πρὸς τὴν ἀρχαίαν ἄρουραν. Ἐπειδὴ ὡσαύτως 4 πλέθρα συνίστων μίαν ἄρουραν.

Μέτρα Χωρητικότητος.

Μικροτέρα μονὰς ἡ πίντα, 8 πίνται 1 γαλλόνιον βασιλικόν, περιέχον 10 λίτρας βαρείας καθαροῦ ὕδατος.—63 γαλλόνια=1 βαρέλιον.

Μέτρα Βάρους.

ά. Διὰ τὰ πολύτιμα εἴδη.

Λίτρα ἰσοβαρὴς μὲ 373 περίπου γαλλικὰ γράμμα (livre troy)· διαιρεῖται εἰς 12 οὐγγίας· ἡ δὲ οὐγγία εἰς 20 δηνάρια, τὸ δὲ δηνάριον εἰς 24 κόκκους, ἐκ τούτου 1 λίτρα=12 οὐγ.=240 δηνάρια=5760 κόκκους.

β΄. Διὰ τὰ κοινὰ εἴδη.

Λίτρα κοινὴ ἰσοβαρὴς μὲ 453 $\frac{1}{2}$ γαλλικὰ γράμμα ἀναλογεῖ πρὸς τὴν ἀρχαίαν μεγάλην ἀττικὴν μνᾶν, ἰσοβαρῆ μὲ 450 γράμμα.

Διαιρεῖται εἰς 2 ἡμίλιτρα, τὸ δὲ ἡμίλιτρον εἰς 8 οὐγγίας, ἡ δὲ οὐγγία εἰς 16 δραχμάς.

Πρὸς τούτοις 112 λίτραι ἀποτελοῦσιν ἕνα ςατῆρα, 20 ςατῆρες ἕνα τόνον.

§. 6΄. Προηγηματικαὶ πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

121. Πρὶν προβῶμεν εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῶν τεσσάρων ἀρχικῶν πράξεων, ἀνάγκη νὰ ἐπιλύσωμεν τὰ ἑξῆς δύο ζητήματα, τὰ ὁποῖα θεωροῦνται ὡς δύο εἰδικαὶ πράξεις, ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Α΄. Δεδομένον συμμιγῆ ἀριθμὸν νὰ τρέψωμεν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, ἀναφερόμενον ἀμέσως πρὸς τὴν πρώτην μονάδα.

Ἔστω π. χ. ὁ συμμιγὴς 13 λίρ. 17 σελλίν. 7 δηνάρια. Φανερόν, ὅτι ἂν προσδιορίσωμεν τὸν ἰσοδύναμον ἀριθμὸν τῶν δηναρίων, τὰ ὁποῖα ἐμπεριέχει ὁ προταθεὶς ἀριθμός, τότε δίδοντες εἰς αὐτὸν παρονομαστὴν τὸν 240, ὅστις ἐκφράζει τὸν ἄμεσον λόγον τοῦ δηναρίου πρὸς τὴν λίραν, σχηματίζομεν τὸν ζητούμενον κλασματικόν.

Πρὸς τοῦτο πολυπλασιάζομεν τὰς 13 λίρας ἐπὶ 20, ἐπειδὴ 20 σελλίνια συνιστῶσι τὴν λίραν, εἰς δὲ τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὰ 17 σελλίνια καὶ εὑρίσκομεν 277 σελλίνια ἀντὶ 13 λίρ. καὶ 17 σελ. Ὁμοίως πολυπλασιάζομεν τὸ ἐξαγόμενον 277 ἐπὶ 12· ἐπειδὴ ἓν σελλίνιον δύ-

$$\begin{array}{r} 13,\ 17,\ 7 \\ \underline{20} \\ 277 \\ \underline{12} \\ 3331 \end{array}$$

ναται 12 δηνάρια· εἰς δὲ τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὰ 7 δηνάρια, καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸν ἰσοδύναμον ἀριθμὸν τῶν δηναρίων 3331.

Ὅθεν δίδοντες παρονομαστὴν 240 λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον ἰσοδύναμον κλασματικὸν $\frac{3331}{240}$ τῆς λίρας.

Ὁμοίως ὁ συμμιγὴς 17 λίτρ. 1 ἡμ. 7 οὐγ. 5 δρ. τρεπόμενος εἰς δραχμὰς ἐκφράζεται μὲ τὸ ἰσοδύναμον κλασματικὸν $\frac{4595}{256}$ τῆς λίτρας. Ἐπειδὴ ἡ δραχμὴ εἶναι τὸ $\frac{1}{256}$ τῆς λίτρας.

Καὶ ἐν γένει, ἵνα τρέψωμεν συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, πολυπλασιάζομεν τὰς ἀνωτέρας μονάδας ἐπὶ τὸν ἄμεσον διαιρέτην αὐτῶν καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὰς μονάδας τῆς τοιαύτης διαιρέσεως, ὅσας ἔχει ὁ προτεθεὶς ἀριθμός.

Ὁμοίως πολυπλασιάζομεν τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην τῶν νέων τούτων μονάδων καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὰς μονάδας τῆς τοιαύτης ὑποδιαιρέσεως, ὅσας περιέχει ὁ ἀριθμός.

Ἐξακολουθοῦμεν δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἕως ὅτου τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας ὑποδιαιρέσεως. Εἰς τὸ τελευταῖον δὲ τοῦτο ἐξαγόμενον δίδομεν παρονομαστὴν τὸν ἀριθμὸν ὅστις ἐκφράζει τὸν λόγον τῆς τελευταίας ὑποδιαιρέσεως πρὸς τὴν πρώτην μονάδα.

122. Β΄. Κλασματικόν τινα ἀριθμὸν νὰ ἐκτιμήσωμεν εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ.

Ἔστω ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{615}{23}$ τῆς λίρας, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ἰσοδύναμον ἔκφρασιν εἰς λίρας καὶ μέρη αὐτῆς, ἤτοι σελλίνια, δηνάρια κτλ.

Διαιροῦντες κατὰ πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν 615 διὰ τοῦ 23 εὑρίσκομεν πηλίκον 26 λίρας καὶ ὑπόλοιπον 17· ὅθεν λέγομεν κατὰ πρῶτον, ὅτι ὁ κλασματικὸς $\frac{615}{23}$ ἰσοῦται μὲ 26 ἀκεραίας καὶ $\frac{17}{23}$ τῆς λίρας.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ λίρα ἰσοδυναμεῖ μὲ 20 σελλίνια, διὰ τοῦτο τρέπομεν τὸ ὑπόλοιπον 17 λίρας εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν σελλινίων, πολυπλασιάζοντες ἐπὶ 20· ὅθεν $\frac{17}{23}$ τῆς λίρας ἄγεται εἰς $\frac{340}{23}$ τοῦ σελλινίου. Οὕτω δὲ διαιροῦντες εὑρίσκομεν πηλίκον 14 καὶ ὑπόλοιπον 18 σελλίνια.

615	23
155	26, 14, 9, 1.
17	
20	
340	
110	
18	
12	
216	
9	
4	
36	
13	

Παρομοίως πολυπλασιάζοντες τὸ ὑπόλοιπον 18 ἐπὶ 12 τρέπομεν αὐτὸ εἰς δηνάρια, καὶ διαιροῦντες εὑρίσκομεν εἰς τὸ πηλίκον 9 δηνάρια.

Τέλος πολυπλασιάζομεν τὸ νέον ὑπόλοιπον τῶν δηναρίων ἐπὶ 4 καὶ τρέπομεν αὐτὸ εἰς φαρδίνια· διαιροῦντες δὲ εὑρίσκομεν 1 φαρδίνιον μὲ ὑπόλοιπον 13.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο συνήθως ἢ παροραῖται ἐντελῶς, ἢ ἐκλαμβάνεται κατά τινα τιμὴν προσεγγίζουσαν, ὡς ἐνταῦθα εἶναι ἀντὶ τοῦ $\frac{3}{4}$.

Ἡ ἀνάλυσις τοῦ ἀνωτέρω ὑποδείγματος ἀρκεῖ διὰ τὴν γενικότητα τοῦ ἑξῆς κανόνος.

« Ἵνα τρέψωμεν κλασματικόν τινα ἀριθμὸν εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ, » διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ λαμβάνομεν πη- » λίκον τὰς ἀκεραίας μονάδας τοῦ κλασματικοῦ.

» Πολυπλασιάζομεν τὸ ὑπόλοιπον ἐπὶ τὸν ἄμεσον διαιρέτην τῆς πρώ- » της μονάδος, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἰδίου παρονομαστοῦ » καὶ λαμβάνομεν πηλίκον τὰς μονάδας τοῦ εἴδους τούτου καὶ δεύτερον » ὑπόλοιπον.

» Πολυπλασιάζομεν τὸ ὑπόλοιπον ἐπὶ τὸν ἐφεξῆς διαιρέτην τῆς πρώτης » μονάδος, καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ αὐτοῦ παρονομαστοῦ.

» Ἐξακολουθοῦμεν δὲ παρομοίως, ἕως ὅτου λάβωμεν καὶ τὸ πηλίκον » τῶν μονάδων τῆς ἐσχάτης ὑποδιαιρέσεως ».

123. Αἱ δύο ἀνωτέρω πράξεις, ὡς ἐξ αὐτοῦ τοῦ σκοποῦ αὐτῶν, ἐπιβεβαιοῦνται ἀλλήλαις· π. χ. ἵνα εὕρωμεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν, ἐξ οὗ προέκυψεν ὁ κλασματικὸς $\frac{3331}{240}$ τῆς λίρας (ἀριθμ. 121), διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν 3331 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 240, ὡς δείκνυται εἰς τὸ παράδειγμα. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην, καθ' ἣν ὁ παρονομαστὴς εἶναι πραγματικὸς λόγος τῆς πρώτης μονάδος πρὸς τὴν ὑποδιαίρεσιν αὐτῆς, εἶναι μεθοδικώτερον καὶ εὐχερέστερον ἂν ὑποστρώσωμεν τὴν πρᾶξιν, ὡς ἕπεται·

```
3331 | 240
       ---------
 931   13 17, 7.
 211
  20
-----
4220
1820
 140
  12
-----
1680
 000
```

```
3331  | 12
----  ---------
  93   277 | 20
----   ---  ---
  91    77   13
  --   ---
   7    17
```

τουτέστι διαιροῦμεν κατὰ πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν 3331 δηνάρια διὰ τοῦ 12 καὶ εὑρίσκομεν εἰς μὲν τὸ πηλίκον σελλίνια 277 εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον δηνάρια 7. Διαιροῦμεν ὡσαύτως τὸ πηλίκον 277 σελλίνια διὰ τοῦ 20 καὶ εὑρίσκομεν νέον πηλίκον λίρας 13 καὶ ὑπόλοιπον 17. Οὕτως ὁ κλασματικὸς $\frac{3331}{240}$ τῆς λίρας, ἤτοι 3331 δηνάρια ἰσοῦται μὲ τὸν συμμιγῆ 13 λίρας 17 σελλίνια 7 δηνάρια.

Ὁμοίως, διὰ τὸ παράδειγμα τοῦ ἀριθμοῦ 122 εὑρόντες τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν 26 λίρ. 14 σελ. 9 δηνάρια καὶ 1 φαρδίνιον περίπου, ἵνα ἀνεύρωμεν τὸν ἰσοδύναμον κλασματικὸν $\frac{615}{23}$, τρέπομεν κατὰ πρῶτον τὸν εὑρεθέντα συμμιγῆ εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν μονάδων τῆς τελευταίας ὑποδιαιρέσεως, ἤτοι εἰς 25669 φαρδίνια καὶ προσθέτομεν καὶ τὸ κλάσμα $\frac{13}{23}$ καὶ εὑρίσκομεν οὕτω $\frac{590400}{23}$ τοῦ φαρδινίου. Καὶ ἐπειδὴ τὸ φαρδίνιον εἶναι τὸ $\frac{1}{960}$ τῆς λίρας, πρέπει νὰ πολυπλασιάσωμεν τὸν κλασματικὸν $\frac{590400}{23}$ ἐπὶ $\frac{1}{960}$, ἢ μᾶλλον τὸν παρονομαστὴν 23 ἐπὶ 960· ὅθεν συνάγομεν $\frac{590400}{23 \text{ ἐπὶ } 960}$ τῆς λίρας.

26 14 9. 1 $\frac{13}{23}$		
20		
520		
14		
534	25669	
12	23	
6408	77007	
9	51338	
6417	13	
4	590400	960
25669	1440	615
	4880	
	000	

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον πρέπει νὰ προκύψῃ $\frac{615}{23}$, συμπεραίνομεν ἐκ τούτου, ὅτι ὁ ἀριθμητὴς 590400 πρέπει νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 960· ἄλλως δὲ πρέπει νὰ ὑπάρχῃ λάθος εἰς τὸν ὑπολογισμόν. Καὶ τῷ ὄντι διαιροῦντες εὑρίσκομεν 615 καὶ ἑπομένως $\frac{615}{23}$ εἶναι ἰσοδύναμος κλασματικὸς τῆς λίρας.

Φέρομεν καὶ τὸ ἑξῆς παράδειγμα τῆς δευτέρας πράξεως μὲ τὴν βάσανον αὐτῆς, περιοριζόμενοι εἰς τὴν ὑπόστρωσιν τῶν ὑπολογισμῶν.

Νὰ τρέψωμεν εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ λιτρῶν, ἡμιλίτρων, οὐγγιῶν κτλ. τὸν κλασματικὸν $\frac{12870}{365}$ τῆς λίτρας.

Πράξις.		Βάσανος.
12870	365	35
1920	35 λίτλ., 0 ἡμ., 4 οὐγ. 2 δρ. $\frac{230}{365}$	2
95		70
2		8
190		564
8		16
1520		3384
60		5642
16		9026
360		
60		
960		
230		

$$9026\,\tfrac{230}{365} = \tfrac{3294720}{365}.$$

Εὑρόντες εἰς τὴν βάσανον τὸν ἀριθμὸν 3294720, ὅςις ἐκφράζει τριακοσιοστὰ ἑξηκοστὰ πέμπτα τῆς δραχμῆς, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ 256 λόγου τῆς δραχμῆς πρὸς τὴν λίτραν καὶ εὑρίσκομεν 12870 λίτρας, τῶν ὁποίων πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ τριακοστὸν ἑξηκοστὸν πέμπτον. Ὅθεν εὑρίσκομεν $\frac{12870}{365}$ τῆς λίτρας.

124. Διὰ τῶν προηγηματικῶν αὐτῶν πράξεων δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰς τέσσαρας ἀρχικὰς πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν κλασμάτων. Διότι τρέπομεν κατὰ πρῶτον τοὺς δεδομένους συμμιγεῖς εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς καὶ μετὰ ταῦτα ἐφαρμόζομεν ἐπὶ τῶν δευτέρων τούτων τοὺς κανόνας τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν κλασμάτων. Οὕτω λαμβάνομεν ἐξαγόμενον κλασματικὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον μεταβάλλομεν εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ· οὗτος δὲ θέλει εἶσθαι ὁ ζητούμενος. Ἀλλ᾽ ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι μακρά, καὶ μάλιστα διὰ τὰς τρεῖς πρώτας πράξεις. Ἔχομεν δὲ ἰδιαιτέρας μεθόδους, ὡς εἴπομεν (ἀριθ. 118), περὶ τῶν ὁποίων ἀμέσως διαλαμβάνομεν. Καὶ ἰδοὺ ὁ ὑπολογισμὸς τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν ἀποτελεῖ ἰδιαιτέραν θεωρίαν.

§. γ΄. Περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Περὶ προσθέσεως.

125. Ἡ πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν ἐκτελεῖται σχεδὸν ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων. Γράφομεν τοὺς προσθετέους κατὰ στήλας ὁμοειδῶν μονάδων καὶ

ὑπάγοντες γραμμὴν, ἀρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς τελευταίας ὑποδιαιρέσεως. Οὕτω προσθέτομεν τὰς μικροτέρας ταύτας μονάδας, καὶ ἂν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν περιέχῃ μίαν ἢ περισσοτέρας μονάδας τῆς ἀμέσου ἀνωτέρας διαιρέσεως, ἐξάγομεν αὐτὰς καὶ γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν τὰς καταλειπομένας μόνον. Προχωροῦντες προσθέτομεν ὡσαύτως τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρω ὑποδιαιρέσεως καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν συνάπτομεν καὶ τὰς προελθούσας ἀπὸ τοῦ προλαβόντος ἀθροίσματος. Ὁμοίως πράττομεν καὶ ἐπὶ τοῦ νέου τούτου ἐξαγομένου καὶ τῶν ἐφεξῆς, ἕως ὅτου λάβωμεν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀνωτέρων μονάδων.

Π. χ. εἰς τὸ ἑπόμενον ὑπόδειγμα.

	43	λίρ.	17	σελ.	11	δην.	3	φαρ.
	17	»	16	»	9	»	2	»
	13	»	18	»	10	»	1	»
	7	»	19	»	4	»	0	»
Ἄθροισμα	83		12		11		2	
Βάσανος	23		32		11		0.	

Ἐλάβομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν φαρδινίων, 6, ἐγράψαμεν δὲ 2 μόνον ὑπὸ τὴν γραμμὴν, τὰ δὲ 4, συνιςῶντα 1 δηνάριον, συνήψαμεν μετὰ τῶν δηναρίων· ὅθεν εὕρομεν 35 δηνάρια, ἐξ ὧν τὰ μὲν 11 ἐγράψαμεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν, τὰ δὲ 24, φέροντα 2 σελλίνια συνήψαμεν μετὰ τῶν σελλινίων· ὁμοίως ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν σελλινίων 72 ἐγράψαμεν μόνον τὰ 12, τὰ δὲ 60 ἐθεωρήσαμεν ὡς 3 λίρας, τὰς ὁποίας συμπεριελάβομεν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν λιρῶν.

126. Ἡ βάσανος ἐκτελεῖται, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἀριθ. 40). Σημειοῦμεν μόνον, ὅτι λαβόντες τὸ ὑπόλοιπον 3 λίρας ἀνελύσαμεν αὐτὰς εἰς σελλίνια· καὶ οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν σελλινίων ἀφαιρεῖται ἀπὸ τῶν 72 σελλινίων, μένοντος ὑπολοίπου 2. Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ περὶ τῶν δηναρίων καὶ τῶν φαρδινίων.

Ὑποστρόνομεν τὴν πρᾶξιν καὶ τοῦ ἑξῆς ὑποδείγματος.

	57	λίτρ.	1	ἡμ.	7	οὐγ.	11	δρ.
	13	»	0	»	6	»	10	»
	27	»	1	»	5	»	5	»
	23	»	1	»	8	»	9	»
	15	»	0	»	7	»	15	»
Ἄθροισμα	138		1		4		2	
Βάσανος	23		4		3		20	

Περὶ Ἀφαιρέσεως.

127. Ἐκτὸς τινων εἰδικοτήτων περὶ τὴν ἐφαρμογὴν, καὶ ἡ πρᾶξις αὕτη ἐκτελεῖται ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων, τουτέστι γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον κατὰ στήλας ὁμοειδῶν μονάδων, καὶ ὑπάγοντες γραμμὴν ἀρχίζομεν τὴν πρᾶξιν δεξιόθεν ἀπὸ τῶν μικροτέρων μονάδων, καὶ γράφομεν τὰ μερικὰ ὑπόλοιπα ὑποκάτω τῆς γραμμῆς, τὸ σύνολον τῶν ὁποίων ἀποτελεῖ τὸ ὅλον ὑπόλοιπον. Ἐὰν δ' ἐν τῷ μέσῳ τῆς πράξεως συμβῇ νὰ ἀφαιρέσωμεν μεγαλήτερον ἀριθμὸν ἀπὸ μικρότερον, τότε δανειζόμεθα μίαν μονάδα ἀπὸ τὰς τοῦ ἀμέσως ἀνωτέρου εἴδους, τὴν ὁποίαν ἀναλύοντες εἰς μονάδας τοῦ κατωτέρου, συνάπτομεν μετὰ τῶν ὁμοειδῶν τοῦ μειωτέου καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν. Προσέχομεν δὲ εἰς τὴν ἑπομένην πρᾶξιν νὰ αὐξήσωμεν τὸν ἀφαιρετέον κατὰ μονάδα διὰ τὸ προλαβὸν δάνεισμα.

Π. χ. ἀπὸ τοῦ	583 λίρ.	17 σελ.	7 δην.	2 φαρ.
ἀφαιροῦντες	149	18	11	3
λαμβάνομεν ὑπόλοιπον	433	18	7	3
Βάσανος	583	17	7	2

Ἑρμηνεία.—3 φαρδίνια ἀπὸ τῶν 2 δὲν ἀφαιροῦνται, διὰ τοῦτο δανειζόμεθα 1 δηνάριον, δυνάμενον 4 φαρδίνια· ὅθεν ἀφαιροῦντες 3 ἀπὸ τοῦ 6 λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον 3 φαρδίνια.

Μεταβαίνοντες εἰς τὰ δηνάρια λέγομεν ὁμοίως 11 ἀπὸ 6, ἢ μᾶλλον 12 ἀπὸ τῶν 7 δὲν ἀφαιροῦνται· ὅθεν δανειζόμεθα ἓν σελλίνιον, ἔχον 12 δηνάρια, καὶ συνάπτοντες αὐτὰ μετὰ τῶν 7 δηναρίων ἔχομεν 19 δηνάρια, ὅθεν ἀφαιροῦντες 12 ἀπὸ 19 λαμάνομεν 7 δηνάρια.

Ὡσαύτως πράττομεν διὰ τὰ σελλίνια· ἀναλύομεν μίαν λίραν εἰς 20 σελλίνια, τὰ ὁποῖα συνάπτομεν μετὰ τῶν 17 σελλινίων, καὶ οὕτως ἐννοοῦμεν 37 σελλίνια. Ὅθεν ἀφαιροῦντες 19 ἀπὸ τῶν 37 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 18 σελλίνια.

Καὶ τέλος 149 λίραι ἀπὸ τῶν 582, ἢ μᾶλλον 150 ἀπὸ τῶν 583 δίδουσιν ὑπόλοιπον 433 λίρας.

Οὕτω τὸ ὅλον ὑπόλοιπον εἶναι 433 λίρ. 18 σελλίν. 7 δην. 3 φαρ. τὸ ὁποῖον ἄλλως τε ἐπιβεβαιοῦται καὶ διὰ τῆς βασάνου, προστιθεμένου τοῦ ὑπολοίπου τούτου μετὰ τοῦ ἀφαιρετέου.

Ὡσαύτως ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ	47 μιλ.	5 σάδ.	13 πολ.
ἀφαιροῦντες	19 »	6 »	35 »
Εὑρίσκομεν	27	6	18
Βάσανος	47	5	13

128. Τέλος ἔστω ἀπὸ τῶν	39 λιτρ.	0 ἡμ.	5 οὐγ.	0 δρ.
νὰ ἀφαιρέσωμεν	2 »	0 »	7 »	11 »
Εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον	36	1	5	5
Βάσανος	39	0	5	0

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο παρουσιάζεται ἡ περίστασις, ὅτι δὲν ὑπάρχουσιν οὐδόλως μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας διαιρέσεως, ὅπως λάβωμεν μίαν ἐξ αὐτῶν καὶ ἀναλύσωμεν εἰς μέρη κατώτερα· οἷον, ἐν ᾧ αἱ 7 οὐγγίαι δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῶν 5, δὲν ὑπάρχουσι καὶ μονάδες ἡμιλίτρων, ὅπως συμβιβάσωμεν τὴν ἔλλειψιν. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ἀνατρέχομεν εἰς τὰς μονάδας τοῦ ἐφεξῆς ἀνωτέρου εἴδους, τουτέστιν εἰς τὰς λίτρας. Οὕτω δανειζόμεθα 1 λίτραν, δυναμένην 2 ἡμίλιτρα, ἐξ ὧν τὸ μὲν ἓν ἐννοοῦμεν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἡμιλίτρων, τὸ δ᾽ἕτερον ἀναλυόμενον εἰς 8 οὐγγίας, συνάπτομεν μετὰ τῶν 5 οὐγγιῶν καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν.

Ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀνωτέρω ὑποδειγμάτων χαράσσει τὴν ὁδὸν τοῦ ὑπολογισμοῦ καὶ διὰ τὰς ὁμοίας περιστάσεις.

Περὶ Πολυπλασιασμοῦ.

129. Ἡ πρᾶξις αὕτη εἶναι δυσκολωτέρα καὶ ἀπαιτεῖ περισσοτέραν προσοχήν· διὰ δὲ τῆς ἀλληλουχίας τῶν ἐφεξῆς ὑποδειγμάτων ἐκτίθεται καθ᾽ ὅλην τὴν ἀκρίβειαν εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις, τὰς ὁποίας πρὸς περισσοτέραν σαφήνειαν δυνάμεθα νὰ ἀνάξωμεν κυρίως εἰς δύο· ά. ὅταν ὁ μὲν πολυπλασιαστέος ἦναι συμμιγὴς ἀριθμὸς, ὁ δὲ πολυπλασιαστὴς ἀμιγής· καὶ β΄. ὅταν ὁ μὲν πολυπλασιαστέος ἦναι συμμιγὴς ἢ ἀμιγὴς, ὁ δὲ πολυπλασιαστὴς ἦναι συμμιγής· διαλαμβάνοντες κατὰ πρῶτον περὶ τῆς πρώτης περιστάσεως, ἐρευνῶμεν αὐτὴν κατὰ τὰς μερικωτέρας περιπτώσεις τῶν ἐφεξῆς ὑποδειγμάτων.

Α΄. Ἔστω ὁ πολυπλασιαστὴς ἀκέραιός τις μικρὸς ἀριθμός.

Π. χ. νὰ πολυπλασιάσωμεν	643 λίρ.	17 σελ.	11 δ.
ἐπὶ			9
παράγεται τὸ γινόμενον	5795	1	3

Ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ πολυπλασιασμοῦ τῶν κατωτέρων μονάδων, λαμβάνομεν γινόμενον 99 δηνάρια, ἐξ ὧν γράφομεν 3 μόνον ὑπὸ τὴν γραμμὴν, τὰ δὲ 96, ἀποτελοῦντα 8 σελλίνια, συνάπτομεν μετὰ τοῦ γινομένου τῶν σελλινίων.

Πολυπλασιάζομεν ὡσαύτως τὰ 17 σελλίνια ἐπὶ 9, καὶ εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν 153 προσθέτομεν καὶ τὰ 8 τὰ ἐκ τοῦ προλαβόντος γινομένου· ὅθεν λαμβάνομεν 161 σελλίνια· ἐκ τούτων γράφομεν 1 μόνον ὑπὸ τὴν γραμμὴν, τὰ δὲ 160 φέροντα 8 λίρας, συνάπτομεν μετὰ τοῦ ἐφεξῆς γινομένου.

Τέλος πολυπλασιάζομεν καὶ τὰς 643 λίρας, καὶ εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν προσθέτομεν καὶ τὰς 8, τὰς ἀπὸ τοῦ γινομένου τῶν σελλινίων· ὅθεν εὑρίσκομεν ὁλικὸν γινόμενον 5795 λίρας, 1 σελ., 3 δηνάρια.

130. Ἐπειδὴ ὁ πολυπλασιαστὴς εἶχεν ἕνα μόνον χαρακτῆρα, διὰ τοῦτο καὶ τὰ γινόμενα τῶν μερῶν τοῦ πολυπλασιαστέου ἐπ᾽ αὐτὸν τὸν πολυπλασιαστὴν ἐλαμβάνοντο εὐχερῶς, καὶ αἱ ἐξαγωγαὶ ἐγίνοντο ὡσαύτως· ὅθεν εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἠρχίσαμεν τὴν πρᾶξιν ἐκ δεξιῶν. Ἀλλ᾽ ὅταν ὁ πολυπλασιαστὴς ἦναι σύνθετος ἐκ πολλῶν χαρακτήρων, αἱ μερικαὶ αὗται πράξεις δὲν ἐκτελοῦνται προχείρως ἀλλ᾽ ἀπαιτεῖται δι᾽ ἑκάστην ἰδιαίτερος πολυπλασιασμός. Διὰ τοῦτο εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν ἁπλούστερον, ἀρχόμενοι τοῦ πολυπλασιασμοῦ ἀριστερόθεν καὶ τμηματικῶς κατὰ τὰ ἑξῆς ἀλληλένδετα μερικὰ γινόμενα.

Ἔστω π. χ. νὰ πολυπλασιάσωμεν	83 λίρ.,	15 σελ,.	9 δην.
ἐπὶ	273		
	249		
	581		
	166		
διὰ 10 σελ.	136	10 σελ.	
5 »	68	5	
6 δην.	6	16	6 δην.
3 »	3	8	3 »
	22873 λίρ.	19 σελ.	9 δην.

Ἑρμηνεία.—Μετὰ τὸν πολυπλασιασμὸν τῶν 83 λιρῶν πολυπλασιάζομεν τὰ 15 σελλίνια ἐπὶ 273· ἵνα λάβωμεν δὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἰς λίρας καὶ σελλίνια, παρατηροῦμεν ὅτι 15 σελλίνια εἶναι τὸ ἄθροισμα 10 καὶ 5 σελλινίων, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ πολυπλασιασθῶσιν ἐπὶ 273. Καὶ ἐπειδὴ 20 σελλίνια, ἰσοδυναμοῦντα μὲ 1 λίραν, πολυπλασιαζόμενα ἐπὶ 273 παράγουσι 273 λίρας, ἄρα τὰ 10 σελλίνια, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς λίρας, θέλει δώσει τὸ ἥμισυ τοῦ 273. Οὕτω διαιροῦντες διὰ 2 εὑρίσκομεν πηλίκον 136 καὶ ὑπόλοιπον 1 λίραν, ἤτοι 20 σελλίνια, τῶν ὁποίων τὸ ἥμισυ εἶναι 10.

Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὰ 5 σελλίνια εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 10, ἄρα τὸ γινόμενον αὐτῶν θέλει εἶσθαι τὸ ἥμισυ τοῦ προλαβόντος. Οὕτως εὑρίσκομεν 68 λίρας 5 σελλίνια.

Προχωροῦντες εἰς τὰ δηνάρια, ἀναλύομεν αὐτὰ εἰς 6 καὶ 3. Καὶ ἐπειδὴ τὰ 6 δηνάρια εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ σελλινίου καὶ ἑπομένως τὸ δέκατον τῶν 5 σελλινίων, διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον αὐτῶν θέλει εἶσθαι τὸ δέκατον τοῦ προηγουμένου. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν 6 λίρ. 16 σελ. 6 δηνάρια· διότι τὸ $\frac{1}{10}$ τῶν 68 λιρῶν, εἶναι 6 μὲ ὑπόλοιπον 8 λίρας, ἤτοι 160 σελλίνια, τὰ ὁποῖα συνάπτομεν μετὰ τῶν 5 σελλινίων καὶ λαμβάνομεν 165 σελλίνια. Καὶ ὁμοίως τὸ $\frac{1}{10}$ τῶν 165 σελλινίων εἶναι 16 μὲ ὑπόλοιπον 5 σελλίνια, ἤτοι 60 δηνάρια, τῶν ὁποίων τὸ $\frac{1}{10}$ εἶναι 6.

Τέλος, ἐπειδὴ 3 δηνάρια εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν 6, διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ προλαβόντος· ὅθεν εὑρίσκομεν 3 λίρας 8 σελλίνια 3 δηνάρια.

Ὑπάγοντες δὲ γραμμὴν καὶ ἀθροίζοντες τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα εὑρίσκομεν ὁλικὸν γινόμενον 22873 λίρας, 19 σελλίνια, 9 δηνάρια.

131. Ὁ τρόπος οὗτος τοῦ προσδιορίζειν τὰ μερικὰ γινόμενα, καλεῖται μέθοδος τῶν συμμέτρων μερῶν· συνίσταται δὲ εἰς τὴν κατάλληλον ἀνάλυσιν τῶν διαφόρων μερῶν τοῦ πολυπλασιαστέου. Καθόσον δὲ συμπεραίνομεν ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω ὑπόδειγμα, πρέπει τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύομεν τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ πολυπλασιαστέου, νὰ ἦναι τοιαῦτα, ὥστε τὰ ἑπόμενα νὰ ἐμπεριέχωνται ἀκριβῶς εἰς τὰ ἡγούμενα, ὡς τὰ 10 σελλίνια εἰς τὰ 20, καὶ ὁμοίως τὰ 5 εἰς τὰ 10 κτλ. Οὕτω δὲ ἵνα λάβωμεν τὸ γινόμενον ἑνός τινος μέρους, τὸ ὁποῖον εἶναι ποσοστόν τι τοῦ προλαβόντος, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τοιοῦτόν τι τοῦ προλαβόντος γινομένου. Διὰ τῆς ἁλύσου δὲ ταύτης τῶν πράξεων φθάνομεν μέχρι τοῦ τελευταίου μερικοῦ γινομένου· ἀθροίζοντες δὲ προσδιορίζομεν τὸ ὅλον γινόμενον. Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι πολὺ εὐχερεστέρα, ἀπαιτεῖ ὅμως οἰκειότητα μὲ τὸν ὑπολογισμόν, ἀποκτωμένην διὰ τῆς ἀσκήσεως.

Ἔστω πρὸς τούτοις	65 λίτ.	1 ἡμ.	7 οὐγ.	5 δρ.
νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ	43			
	195			
	260			
διὰ 1 ἡμ.	21	1 ἡμ.		
4 οὐγ.	10	1 »	4 οὐγ.	
2 »	5	0	6 »	
1 »	2	1	3 »	
4 δρ.	0	1	2	12 δρ.
1 »	0	0	2	11 »
	2836 λ.	0 ἡμ.	2 οὐγ.	7 δρ.

132. Πρὶν μεταβῶμεν εἰς τὴν Β΄. περίστασιν, φέρομεν τὸ ἑξῆς ὑπόδειγ-

μα, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ πολυπλασιαστὴς εἶναι σύνθετος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος.

Νὰ πολυπλασιάσωμεν	65 μίλ.,	7 στάδ.,	28 πολ.	
ἐπὶ	43 $\frac{7}{8}$			
	195			
	260			
4 στάδ.	21	4 στάδ.		
2 »	10	6 »		
1 »	5	3 »		
20 πολ.	2	5	20 πολ.	
8 »	1	0	24	
$\frac{4}{8}$	32	7	34	
$\frac{2}{8}$	16	3	37	
$\frac{1}{8}$	8	1	38 $\frac{1}{2}$	
	2894 μίλ.	0 στάδ.	33 $\frac{1}{2}$ πολ.	

Ἑρμηνεία. Ὁ μὲν πολυπλασιασμὸς ἐπὶ 43 δὲν προσφέρει τι νέον, ἐκτὸς τοῦ ὅτι ἐκ τοῦ αὐτοῦ μερικοῦ γινομένου 5 μίλ. 3 στάδ. ἐλάβομεν τὸ $\frac{1}{2}$ διὰ τὰ 20 καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ διὰ τὰ 8 πόλα· ἐπειδὴ οὕτως ἐπισπεύδεται ἡ πρᾶξις. Ἀλλ' ὁ πολυπλασιασμὸς ἐπὶ $\frac{7}{8}$ ἐγένετο ὡσαύτως δι' ἀναλύσεως εἰς 4, 2, 1 ὄγδοα, καὶ ἐλάβομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πολυπλασιαστέου διὰ τὸν πολυπλασιασμὸν αὐτοῦ ἐπὶ $\frac{4}{8}$, τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τούτου διὰ τὸν πολυπλασιασμὸν ἐπὶ $\frac{2}{8}$, καὶ τέλος τὸ ἥμισυ τοῦ τελευταίου τούτου διὰ τὸ $\frac{1}{8}$.

133. Ἡ σκέψις ἡ ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω ὑποδείγματος εὐκολύνει ἤδη τὴν ἀνάλυσιν καὶ διὰ τὴν Β΄. περίστασιν· ὅταν δηλ. ὁ πολυπλασιαστὴς ἦναι συμμιγὴς ἀριθμός.

Ἔστω π. χ.	45 λ.	19 σελ.	5 δην.	
νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ	13 λίτ.	1 ἡμ.	7 οὐγ.	
	135			
	45			
διὰ 10 σελ.	6	10 σελ.		
5 »	3	5		
4 »	2	12		
1	0	13		
4 δην.	0	4	4 δην.	
1	0	3	1	
ἐπὶ 1 ἡμ.	22	19	8	2 φαρ.
4 οὐγ.	11	9	10	1
2 »	5	14	11	0 $\frac{1}{2}$
1 »	2	17	5	2 $\frac{1}{4}$
	640 λίρ.	14 σελ.	4 δην.	1 $\frac{3}{4}$ φ.

Πολυπλασιάσαντες κατὰ πρῶτον ἐπὶ 13 λίτρας, ὡς εἰς τὴν προηγουμένην περίστασιν, ἐλάβομεν ἔπειτα τὸ ἥμισυ τοῦ πολυπλασιαστέου διὰ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμίλιτρον, ἀναλύσαντες δὲ καὶ τὰς 7 οὐγγίας εἰς 4, 2 καὶ 1 οὐγγίας, ἐλάβομεν τοῦ προλαβόντος γινομένου τὸ ἥμισυ, διὰ τὰς 4 οὐγγίας, καὶ τοῦ ἡμίσεως τούτου πάλιν τὸ ἥμισυ διὰ τὰς 2 οὐγγίας, καὶ τέλος τοῦ νέου τούτου ἡμίσεος τὸ ἥμισυ διὰ τὴν 1 οὐγγίαν· οὕτω δὲ προσθέσαντες εὕρομεν ὁλικὸν γινόμενον 640 λίρας, 14 σελλίνια, 4 δηνάρια, 1 $\frac{3}{4}$ φαρδ.

134. Περιοριζόμεθα εἰς ἁπλῆν τὴν ὑπόστρωσιν τῶν πράξεων τοῦ ἐφεξῆς ὑποδείγματος.

	13 λίτ.	1 ἡμ.	7 οὐγ.			
	45 λίρ.	19 σελ.	5 δην.			
	65					
	52					
διὰ 1 ἡμ.	22	1 ἡμ.				
4 οὐγ.	11	0 »	4 οὐγ.			
2 »	5	1 »	2 »			
1 »	2	1 »	5 »			
ἐπὶ 10 σελ.	6	1 »	7 »	8 δραχ.		
5 »	3	0 »	7 »	12		
2 »	1	0 »	6 »	4	$\frac{4}{5}$	96
2 »	1	0 »	6 »	4	$\frac{4}{5}$	96
4 δην.	0	0 »	3 »	11	$\frac{14}{30}$	56
1 »	0	0 »	0 »	14	$\frac{104}{120}$	104
	640	1,	3,	7	$\frac{112}{120}$	352[120
						112 2

Παρατηροῦμεν δὲ, ὅτι, ἂν καὶ οἱ δύο παράγοντες ἦναι οἱ αὐτοὶ, ὁποῖοι καὶ οἱ εἰς τὸ προηγούμενον ὑπόδειγμα, ἐν τοσούτῳ τὰ γινόμενα διαφέρουσιν, οὐχὶ μὲν κατὰ τὸ ἀκέραιον, ἀλλὰ κατὰ τὸ κλασματικὸν μέρος, τουτέστι κατὰ τὰς ὑποδιαιρέσεις τῆς ἀρχικῆς μονάδος. Ἑπομένως ἡ ἀρχὴ τοῦ ἀριθ. 56 ὡς πρὸς τὴν ἀντιστροφὴν τῶν παραγόντων, ὅτι δὲν μεταβάλλεται τὸ γινόμενον, ἐπαληθεύει μόνον εἰς τοὺς ἀφηρημένους ἀριθμούς. Ἀλλὰ τοῦτο προέρχεται ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν ὑποδιαιρέσεων τῆς ἀρχικῆς μονάδος εἰς τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον ὑπόδειγμα. Καθότι εἰς μὲν τὸ πρῶτον ἀρχικὴ μονὰς γινομένου εἶναι ἡ λίρα διαιρουμένη εἰς 20 σελλίνια καὶ ὑποδιαιρουμένη εἰς 240 δηνάρια ἢ 960 φαρδίνια, εἰς δὲ τὸ δεύτερον εἶναι ἡ λίτρα ἔχουσα ἄλλην διαίρεσιν, τουτέστιν εἰς 2 ἡμίλιτρα ἢ 16 οὐγγίας ἢ 256 δραχμὰς κτλ. Ἑπομένως δὲν δύνανται νὰ ἐξισωθῶσι τὰ μέρη τῆς μιᾶς πρὸς τὰ τῆς ἄλλης μονάδος. Ἤθελεν ἐλλείψει δὲ ἡ τοιαύτη διαφορὰ, ἂν, ἀναγομένων τῶν δύο παραγόντων εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς, ἐλαμβάνομεν τὸ γινόμενον τῶν δευτέρων τούτων καὶ ἐτρέπομεν αὐτὸ μετὰ ταῦτα εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ ἢ τῆς λίρας, ἢ τῆς λίτρας, κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ ζητήματος.

Ἵνα μὴ παραπίπτομεν δὲ εἰς ἄτοπον ὡς ἐκ τῆς ἐσφαλμένης διατάξεως τῶν παραγόντων, πρέπει ὁσάκις ἐργαζόμεθα ἐπὶ συγκεκριμένων καὶ μάλιστα ἐπὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν νὰ ἐρευνῶμεν μετὰ σκέψεως τὸ ζήτημα· καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον, σχηματιζόμενον ἀπὸ τὸν πολυπλασιαστέον, πρέπει νὰ ἐκφράζῃ μονάδας τοῦ αὐτοῦ εἴδους, ὁποίου καὶ ὁ πολυπλασιαστέος, ἐν ᾧ ὁ πολυπλασιαστὴς, ὁποῖος καὶ ἂν ἦναι, εἴτε συμμιγὴς εἴτε ἀμιγὴς, ἐκφράζει μόνον τὴν σχέσιν, ἢ τὸν τρόπον τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ γινομένου, διὰ τοῦτο λαμβάνομεν ὡς πολυπλασιαστέον τὸν ἐκφράζοντα μονάδας ὁμοειδεῖς μὲ τὰς τοῦ ζητουμένου γινομένου.

135. Ἡ εὐθεῖα βάσανος τοῦ πολυπλασιασμοῦ ἐκτελεῖται μὲν διὰ τῆς διαιρέσεως, ἀλλ᾽ εἶναι ἁπλούστερον νὰ διπλασιάσωμεν τὸν ἕνα καὶ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ δύο τὸν ἕτερον παράγοντα καὶ οὕτω νὰ πολυπλασιάσωμεν τὸ διπλοῦν ἐπὶ τὸ ἥμισυ, ἢ τὸ ἀνάπαλιν καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, (ἀριθ. 77).

Φέρομεν τέλος καὶ τὰ ἑξῆς ζητήματα.

Α΄. Ἐμπόρευμά τι τιμᾶται πρὸς 2 λίρας 17 σελλίνια 5 δηνάρια τὴν κοινὴν λίτραν. Ζητεῖται πόσον τιμῶνται 15 λίτραι;

Β΄. Διὰ 1 ἄκρον ἀπαιτεῖται σπόρος σίτου 815 λίτρας 1 ἡμίλιτρον 7 οὐγ. πόσον ἀπαιτεῖται διὰ 17 ἄκρα 3 ῥούδ.

Γ΄. Ὁδοιπόρος διανύει 5 στ. 3 πόλ. τὴν ὥραν. Ζητεῖται πόσα θέλει διανύσει εἰς 8 ὥρας καὶ 25 λεπτά;

Περὶ Διαιρέσεως.

136. Ἡ διαίρεσις τῶν συμμιγῶν ἐκτελεῖται ἄλλοτε ἄλλως κατὰ τὰς διαφόρους περιστάσεις, κατὰ τὰς ὁποίας παρουσιάζονται οἱ δύο ὅροι αὐτῆς· τὰς περιστάσεις ταύτας διακρίνομεν κυρίως εἰς τρεῖς.

Α΄. Ὅταν ὁ μὲν διαιρέτης ἦναι ἀμιγὴς, ὁ δὲ διαιρετέος συμμιγής.

Β΄. Ὅταν ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἦναι συμμιγεῖς, ἀλλὰ τοῦ αὐτοῦ εἴδους.

Γ΄. Ὅταν ἦναι συμμιγεῖς καὶ διαφόρου εἴδους.

Ἐκθέτομεν δὲ τοὺς ἰδιάζοντας κανόνας περὶ μιᾶς ἑκάστης κατὰ τάξιν διὰ τῶν ἐφεξῆς ὑποδειγμάτων.

Α'. περίστασις. Ἠγοράσαμεν 568 πήχεις ὑφάσματος διὰ λίρας 25469 σελλίνια 19 δηνάρια 11. Ζητεῖται πόσον ἐτιμήθη ὁ πῆχυς;

Ἡ μὲν ἀνάλυσις τοῦ ζητήματος εἶναι ἁπλουστάτη. Διαιροῦμεν κατὰ πρῶτον 25469 λίρας διὰ τοῦ 568 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον μὲν 44 ὑπόλοιπον δὲ 477. Τρέπομεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἰς σελλίνια, πολυπλασιάζοντες αὐτὸ ἐπὶ 20, καὶ προσθέτομεν καὶ τὰ 19 σελλίνια τοῦ διαιρετέου· ὅθεν λαμβάνομεν 9559 σελλίνια, τὰ ὁποῖα διαιροῦμεν ὡσαύτως διὰ τοῦ διαιρέτου.

```
25469, 19, 11[568
                ----------------
 2749            44, 16, 9, 3
  477
   20
 -----
 9559
 3879
  471
   12
 -----
 5663
  551
    4
 -----
 2204
  500
```

Οὕτω λαμβάνομεν πηλίκον μὲν 16 ὑπόλοιπον δὲ 471 σελλίνια.

Τρέπομεν ὁμοίως τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἰς δηνάρια, πολυπλασιάζοντες αὐτὸ ἐπὶ 12, καὶ προσθέτομεν καὶ τὰ 11 δηνάρια τοῦ διαιρετέου. Οὕτω λαμβάνομεν 5663 δηνάρια. Διαιροῦντες δὲ εὑρίσκομεν πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 551 δηνάρια.

Τέλος πολυπλασιάζομεν τὸ νέον τοῦτο ὑπόλοιπον ἐπὶ 4 καὶ τρέπομεν αὐτὸ εἰς φαρδίνια 5663· διαιροῦντες δὲ εὑρίσκομεν πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 500. Οὕτω τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι 44 λίρ. 16 σελ. 9 δην. 3 φαρ. καὶ $\frac{500}{568}$ τοῦ φαρδινίου.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο κλάσμα συνήθως ἢ παραλείπεται ἢ ἐκλαμβάνεται ἀντὶ μονάδος.

137. Β'. Περίστασις. Ὅταν οἱ δύο ὅροι ἦναι συμμιγεῖς καὶ τοῦ αὐτοῦ εἴδους· π. χ. ἡ μία υἰάρδα ἑνός τινος ἔργου τιμᾶται 3 λίρ. 15 σελ. 6 δην. Ζητεῖται πόσον μῆκος κατασκευάζεται διὰ 825 λίρ. 12 σελ. 5 δην.

Ἐπειδή, ὁσάκις ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἐμπεριλαμβάνεται εἰς τὸν δεύτερον, τόσαι εἶναι αἱ κατασκευαζόμεναι μονάδες, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, καὶ τὸ πηλίκον αὐτῆς θέλει ἐκφράσει τὰς ζητουμένας μονάδας τοῦ μήκους, τουτέστιν υἰάρδας καὶ ὑποδιαιρέσεις τῆς υἰάρδας.

```
825 λίρ.  12 σελ.  5 δην.        3 λίρ.  15 σελ.  6 δην.
 20                                20
-----                             ----
16512                              75
   12                              12
------                            ----
198149 [906                        906
-----------------------------------
  1694   218 υιάρ. 2 πόδ. 1 δάκτ. 426/906.
  7889
   641
     3
  ----
  1923
   111
    12
  ----
   222
  ----
   111
  ----
  1332
   426
```


Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην, ἐπειδὴ ἀμφότεροι οἱ ὅροι τῆς διαιρέσεως εἶναι ὁμοειδεῖς, τρεπόμενοι εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς, λαμβάνουσι κοινὸν παρονομαστὴν 240. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ἡ ἀπάλειψις τῶν παρονομαστῶν δὲν ἀλλοιοῖ τὸ πηλίκον, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον, εἰς υιάρδας· τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς πόδας, καὶ διαιροῦντες εὑρίσκομεν ὡσαύτως πόδας εἰς τὸ πηλίκον· ὁμοίως τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς δακτύλους καὶ εὑρίσκομεν δακτύλους εἰς τὸ πηλίκον κτλ.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω πράξεως συμπεραίνεται ἡ μέθοδος καὶ διὰ πᾶν ἄλλο ζήτημα. Σημειοῦμεν μόνον, ὅτι, ἂν ὁ εἷς τῶν ὅρων τῆς διαιρέσεως δὲν περιέχῃ μονάδας ἐξ ὅλων τῶν ὑποδιαιρέσεων τῆς ἀρχικῆς, ὡς ὁ ἕτερος, πρέπει καὶ αὐτὸς νὰ τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας ὑποδιαιρέσεως, ἐκ τῶν ὁποίων περιέχει ὁ ἕτερος· διότι τότε ἐκφράζουσιν ἀμφότεροι ὁμοειδῆ ποσὰ καὶ δύναται νὰ ἀπαλειφθῇ ὁ κοινὸς αὐτῶν παρονομαστής.

138. Γ'. Περίστασις. Ἔστωσαν οἱ δύο ὅροι συμμιγεῖς, ἀλλὰ διαφόρου εἴδους. Π. χ. ἠγοράσαμεν 358 λίτρ. 11 οὐγ. 5 δραχ. χρυσοῦ νήματος διὰ 2259 λίρ. 17 σελ. 10 δην. Ζητεῖται πόσον ἐτιμήθη ἡ λίτρα;

		2259, 17, 10.		358 λίρ. 11 ούγ. 5 δρ.
		96		12
		13554		4307
		20331		8
δην.	10	48		34461 ἤτοι $\frac{34461}{96}$
	5	24		
	2	9	12 σελ.	
δην.	6	2	8	
	3	1	4	
	1	0	8	

216949 λ. 12 σελ. | 34461

6 λίρ. 5 σελ. 10 δην. 3 φαρδ.

10183
20
203672
31367
12
376404
31794
4
127176
23793

Ἀφ᾽ οὗ τρέψωμεν τὸν διαιρέτην εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν, ἔχοντα παρονομαστὴν 96, τὸν λόγον τῆς δραχμῆς πρὸς τὴν μικρὰν λίτραν, ἤτοι εἰς $\frac{34461}{96}$, διαιροῦμεν δι᾽ αὐτοῦ τὸν δεδομένον διαιρετέον. Πρὸς τοῦτο πολυπλασιάζοντες τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 96 εὑρίσκομεν 216949 λίρ. 12 σελ. καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, κατὰ τὴν πρώτην περίστασιν, προσδιορίζομεν τὸ ἀνωτέρω προκύψαν πηλίκον 6 λιρ. 5 σελ. 10 δην. 3 φαρδίν.

139. Ἐξ ὅσων εἴδομεν εἰς τὰ ἐκτεθέντα ὑποδείγματα συμπεραίνομεν, ὅτι ὅταν ὁ διαιρετέος ἦναι διαφόρου εἴδους ποσὸν ἀπὸ τὸ τοῦ διαιρέτου, τότε τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸ τοῦ διαιρετέου, ἐπειδὴ τὸ πηλίκον εἰς τὴν περίστασιν ταύτην θεωρεῖται ὡς ὁ ἄγνωστος πολυπλασιαστέος, ἐξ οὗ προέκυψεν ὁ διαιρετέος, θεωρούμενος ὡς γινόμενον. Ἀλλ᾽ ὅταν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τῆς διαιρέσεως ἦναι ὁμοειδεῖς, τότε ἡ ἐκφώνησις τοῦ ζητήματος προσδιορίζει τὸ εἶδος τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην τὸ μὲν πηλίκον θεωρεῖται ὡς ἄγνωστος πολυπλασιαστὴς, ὁ δὲ διαιρέτης, ὡς ὁ πολυπλασιαστέος, ἐξ οὗ ἐσχηματίσθη ὁ διαιρετέος θεωρού-

μενος ὡς γινόμενον. Τὴν ἰδέαν ταύτην διασαφίζει μὲν καὶ ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀνωτέρω ζητημάτων, ἀλλὰ συμπεραίνομεν πρὸς τούτοις καὶ ἐξ ὅσων ἀνεφέραμεν εἰς τὸν πολυπλασιασμὸν, ὅτι ὁ πολυπλασιαστέος καὶ τὸ γινόμενον εἶναι ποσὰ τοῦ αὐτοῦ εἴδους.

140. Ἡ εὐθεῖα βάσανος τῆς διαιρέσεως ἐκτελεῖται διὰ τοῦ πολυπλασιασμοῦ. Ἀλλ᾽ εἶναι προσφορώτερον νὰ διπλασιάζωμεν τοὺς ὅρους, ἢ νὰ διαιρῶμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ 2, ὁσάκις ἡ διαίρεσις εἶναι δυνατὴ, καὶ νὰ ἐφαρμόζωμεν ἐπὶ τῶν διπλασίων ἢ τῶν ἡμίσεων τῶν ὅρων ὁμοίαν διαίρεσιν. Οὕτω δὲ, κατὰ τὰς συσταθείσας ἀρχὰς τῆς διαιρέσεως (ἀριθ. 77), τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι τὸ αὐτό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

Περὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§. ά. Εἰσαγωγή.

141. Ἀφ᾽ ὅλους τοὺς τρόπους τοῦ διαιρεῖν τὴν ἀρχικὴν μονάδα ὁ ἁπλούστερος καὶ προσφορώτερος συνάμα εἶναι ἡ ὑποδιαίρεσις αὐτῆς εἰς μέρη διαδοχικῶς ὑποδεκαπλάσια. Ἐκ τούτου προκύπτουσι κλάσματα, τῶν ὁποίων ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ὑπὸ μηδενικῶν, καὶ τὰ ὁποῖα διὰ τὴν κανονικὴν ταύτην ὑποδιαίρεσιν διὰ τοῦ 10 λέγονται δεκαδικά.

Ἡ ὑποδιαίρεσις αὕτη διευκολύνει μεγάλως τὸν ὑπολογισμὸν τῶν κλασμάτων. Ἐπειδὴ μετά τινας μικρὰς καὶ ἁπλουστάτας μεταμορφώσεις τῶν κλασματικῶν τούτων ἀριθμῶν αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις ἐκτελοῦνται ἐπ᾽ αὐτῶν, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων. Τοῦτο θέλομεν ἀναπτύξει ἑπομένως, ἀφ᾽ οὗ πρότερον διαλάβωμεν περὶ τῆς ὀνοματολογίας τῶν δεκαδικῶν καὶ περὶ τῆς γραφῆς αὐτῶν διὰ χαρακτήρων.

142. Καθὼς δεκαπλασιάσαντες τὴν μονάδα ἐσχηματίσαμεν τὴν δεκάδα καὶ ὁμοίως τὴν ἑκατοντάδα κτλ. ὡσαύτως δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν τὴν ἀρχικὴν μονάδα διαιρουμένην εἰς δέκα μέρη, ἤτοι δεκατημόρια, καὶ ὁμοίως ἕκαστον δεκατημόριον ὑποδιαιρούμενον εἰς ἕτερα δέκα μέρη, τὰ ὁποῖα καθὸ δεκατημόρια δεκατημορίων, εἶναι ἑκατοστημόρια τῆς ἀρχικῆς μονάδος, καὶ ὁμοίως ἕκαστον ἑκατοστημόριον εἰς δέκα ἴσα μέρη, ἤ-

τοι χιλιοστημόρια τῆς μονάδος, καὶ ὁμοίως εἰς μυριοστημόρια, ἑκατογχιλιοστημόρια, ἑκατομμυριοστημόρια, κτλ.

Παρατηροῦντες ἤδη, ὅτι δέκα μονάδες μιᾶς τινος ὑποδιαιρέσεως συνιστῶσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, ἐννοοῦμεν εὐκόλως, ὅτι ἡ ἀρίθμησις τῶν δεκαδικῶν γίνεται ὡς ἡ τῶν ἀκεραίων. Οὕτω π. χ. τρία δεκατημόρια πέντε ἑκατοστημόρια καὶ ἓξ χιλιοστημόρια, τρεπόμενα ὅλα εἰς χιλιοστημόρια ἀριθμοῦνται τριακόσια πεντήκοντα ἓξ χιλιοστημόρια κτλ.

143. Ἐπειδὴ κατὰ τὸν κανόνα τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν (ἀριθμ. 14) πᾶς χαρακτὴρ, γραφόμενος πρὸς ἀριστερὰν ἄλλου, λαμβάνει σχετικῶς τιμὴν δεκαπλασίαν, τὸ ἀνάπαλιν δὲ, γραφόμενος πρὸς τὰ δεξιὰ, γίνεται ὑποδεκαπλάσιος, ἄρα, ἂν πρὸς τὰ δεξιὰ ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ γράψωμεν νέους χαρακτῆρας, προσέχοντες πάντοτε νὰ διακρίνωμεν αὐτοὺς διά τινος σημείου, οἱ νέοι οὗτοι χαρακτῆρες θέλουσι παραστήσει μέρη τῆς μονάδος διαδοχικῶς ὑποδεκαπλάσια, τουτέστι δεκατημόρια, ἑκατοστημόρια, χιλιοστημόρια κτλ. Ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ταύτης στηρίζεται τῷ ὄντι ἡ γραφὴ τῶν δεκαδικῶν.

Οὕτω γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ χωρίζομεν αὐτὸν δι' ὑποδιαστολῆς, ἐφεξῆς δὲ γράφομεν πρῶτον τὰ δεκατημόρια, ἔπειτα τὰ ἑκατοστημόρια, ἐφεξῆς δὲ τὰ χιλιοστημόρια κτλ. καθ' ἣν προέκυψαν τάξιν.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 24 ἀκέραια καὶ 75 ἑκατοστημόρια γράφεται 24,75. Διότι 70 ἑκατοστημόρια ἰσοῦνται μὲ 7 δεκατημόρια.

Ὁμοίως 5 ἀκέραια καὶ 478 χιλιοστημόρια γράφεται 5,478· ἐπειδὴ ἐντὸς τοῦ δεκαδικοῦ ἐμπεριέχονται 4 δεκατημόρια 7 ἑκατοστημόρια καὶ 8 χιλιοστημόρια.

144. Προτεθείσθω ἤδη νὰ ἀπαγγείλωμεν γεγραμμένον τινὰ δεκαδικὸν ἀριθμὸν, π. χ. τὸν 56,3506.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος δύναται νὰ ἐκφρασθῇ κατὰ πρῶτον 56 μονάδες καὶ τρία δεκατημόρια 5 ἑκατοστημόρια καὶ 6 μυριοστημόρια. Ἀλλ' ἐπειδὴ 3 δεκατημόρια δύνανται 30 ἑκατοστημόρια ἢ 300 χιλιοστημόρια ἢ 3000 μυριοστημόρια, καὶ ὁμοίως 5 ἑκατοστημόρια δύνανται 50 χιλιοστημόρια ἢ 500 μυριοστημόρια, συμπεραίνομεν, ὅτι ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς ἐκφωνεῖται μᾶλλον 56 μονάδες καὶ 3506 μυριοστημόρια· τουτέστι δεκαδικοῦ τινος ἀριθμοῦ ἐκφωνοῦμεν τὸ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν κλασματικὸν μέρος, ὡς ἂν ἦτον ἐπίσης ἀκέραιος ἀριθμὸς, καὶ ἀποδίδομεν τὸ ὄνομα τῆς χαρακτηριζούσης αὐτὸ τελευταίας δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.

Ὡσαύτως 7,49305 ἐκφωνεῖται 7 μονάδες καὶ 49305 ἑκατογχιλιοστημόρια κτλ.

Δυνάμεθα πρὸς τούτοις νὰ συμπεριλάβωμεν ὡσαύτως εἰς τὴν αὐτὴν ἔκφρασιν καὶ τὸ ἀκέραιον μέρος. Διότι καὶ αἱ μονάδες τῶν ἀκεραίων τάξεων ὑπόκεινται ὡσαύτως εἰς ὁμοίαν τροπὴν δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων. Π. χ. εἰς τὸν ἀριθμὸν 56,3506 αἱ 6 ἁπλαῖ μονάδες δύνανται 60 δεκατημόρια ἢ 600 ἑκατοστημόρια κτλ. καὶ τέλος 60000 μυριοστημόρια, καὶ ὁμοίως αἱ 5 δεκάδες δύνανται 500000 μυριοστημόρια. Ἐκ τούτου 56,3506 ἐκφωνεῖται πεντακόσιαι ἑξήκοντα τρεῖς χιλιάδες καὶ πεντακόσια ἓξ μυριοστημόρια· καὶ ὁμοίως περὶ τῶν ἄλλων. Ἀλλ' ὁ πρῶτος τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου διακρίνομεν τὸ ἀκέραιον μέρος εἶναι μᾶλλον εὔχρηστος.

145. Ἀμφότεροι οὗτοι οἱ τρόποι τῆς ἀπαγγελίας τῶν δεκαδικῶν ὑπαγορεύουσιν ἄλλον κανόνα τῆς γραφῆς αὐτῶν ἁπλούστερον, ἢ τὸν προῤῥηθέντα. Οὕτως, ἔστω νὰ γραφθῇ ὁ ἀριθμὸς εἴκοσι ἐννέα μονάδες καὶ τριακόσια πεντήκοντα τέσσαρα χιλιοστημόρια.

Γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἀκέραιον 29 καὶ τὴν ὑποδιαστολὴν, μετ' αὐτὴν δὲ ἀμέσως τὸ δεκαδικὸν 354· ἐπειδὴ 300 χιλιοστημόρια δύνανται 3 δεκατημόρια· καὶ ὡσαύτως 50 χιλιοστημόρια ἰσοῦνται μὲ 5 ἑκατοστημόρια. Οὕτω δὲ 29,354 ἐκφράζει τὸν προταθέντα ἀριθμόν.

Ὁμοίως ἑκατὸν ἐννέα ἀκέραια καὶ δύο χιλιάδες καὶ τρία μυριοστημόρια γράφεται 109,2003· ἐπειδὴ δύο χιλιάδες μυριοστημορίων ἰσοῦνται μὲ δύο δεκατημόρια· καὶ ἐν γένει,

Ἵνα γράψωμεν διὰ χαρακτήρων δεκαδικόν τινα ἀριθμὸν, γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἀκέραιον, ἢ ἐν ἐλλείψει τοιούτου τὸ μηδενικὸν, καὶ διακρίνομεν αὐτὸ δι' ὑποδιαστολῆς, προχωροῦντες δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ γράφομεν καὶ τὸ κλασματικὸν μέρος, προσέχοντες νὰ δώσωμεν εἰς αὐτὸ τόσας θέσεις, ὅσας ἀπαιτεῖ ἡ τάξις τῆς τελευταῖον ἐκφωνουμένης δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ὁ ἀριθμὸς δέκα ἑπτὰ ἑκατοστημόρια γράφεται 0,17.

Ὁμοίως ἑκατὸν εἴκοσι πέντε μυριοστημόρια γράφεται 0,0125. Ἐπειδὴ τὸ μυριοστημόριον εἶναι τετάρτης ὑποδιαιρέσεως κτλ.

Ὁσάκις δὲ εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ ἀριθμοῦ δὲν διακρίνεται τὸ ἀκέραιον μέρος, τότε γράφομεν ὁλόκληρον ὡς ἀκέραιον, καὶ μετὰ ταῦτα ἀρχόμενοι δεξιόθεν διακρίνομεν δι' ὑποδιαστολῆς τοσούτους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, ὅσους ὁρίζει ἡ δεκαδικὴ αὕτη ὑποδιαίρεσις.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς εἰκοσιτέσσαρες χιλιάδες καὶ διακόσια δεκατέσσαρα ἑκατοστημόρια γράφεται κατὰ πρῶτον 24214, καὶ ἐπειδὴ ὁ τελευταῖος χαρακτὴρ πρέπει νὰ ἐκφράζῃ ἑκατοστημόρια, διαστέλλομεν διὰ τοῦτο τοὺς δύο τελευταίους χαρακτῆρας· ὅθεν ἔχομεν 242,14.

Ὡσαύτως διακόσιαι πεντήκοντα τρεῖς χιλιάδες καὶ εἰκοσιεννέα μυριοστημόρια γράφεται 25,3029, κτλ.

146. Ἤδη καταλαμβάνομεν ὁπωσοῦν τὰ πλεονεκτήματα τῆς δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως. Α΄. Ἐν ᾧ τὰ κοινὰ κλάσματα παριστάνονται διὰ δύο ἀριθμῶν, τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ, ἐνταῦθα ἡ μὲν ὑποδιαστολὴ ἀναπληροῖ τὴν θέσιν τοῦ παρονομαστοῦ, ὅστις εἶναι ἡ μονάς, ἀκολουθουμένη ὑπὸ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσοι εἶναι οἱ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν χαρακτῆρες, ὁ ἀριθμητὴς δὲ εἶναι αὐτὸς ὁ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς παριστανόμενος ἀριθμός.

Οὕτως 23,5037, γραφόμενος ὡς οἱ κοινοὶ κλασματικοί, τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $23\frac{5037}{10000}$ καὶ δι' ἀγωγῆς τοῦ ἀκεραίου ὑπὸ τὴν $\frac{235037}{10000}$.

Ὡσαύτως 2,00409 ἰσοῦται μὲ $2\frac{409}{100000}$, ἤτοι $\frac{200409}{100000}$.

Καὶ 0,0002159 ἰσοῦται μὲ $\frac{2159}{10000000}$, κτλ.

Καὶ ἀντιστρόφως $2\frac{53}{1000}$ ἢ $\frac{2053}{1000}$ ἰσοῦται μὲ 2,053.

Καὶ $\frac{172049}{10000}$ τρέπεται εἰς 17,2049, κτλ.

Αἱ μεταμορφώσεις αὗται τῶν κλασματικῶν ἀπὸ τῶν δεκαδικῶν παραστάσεων εἰς κοινὰς καὶ τὸ ἀνάπαλιν ἀπὸ τῶν κοινῶν εἰς τὰς ἰσοδυνάμους δεκαδικάς, ἀπαντῶνται συχνότατα εἰς τὸν ὑπολογισμόν.

147. Β΄. Δεκαδικόν τι κλάσμα πολυπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1000, κτλ., μετατιθεμένης τῆς ὑποδιαστολῆς μίαν, δύο, τρεῖς κτλ. θέσεις πρὸς τὰ δεξιά· ἀντιστρόφως δὲ διαιρεῖται διὰ τοῦ 10, 100, 1000, κτλ., μετατιθεμένης τῆς ὑποδιαστολῆς πρὸς ἀριστεράν.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 153,07295 γίνεται χιλιαπλάσιος, μετατιθεμένης τῆς ὑποδιαστολῆς τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὅτε ἔχομεν 153072,95· καὶ τὸ ἀνάπαλιν διαιρεῖται διὰ τοῦ 1000, ὀπισθοχωρούσης τῆς ὑποδιαστολῆς τρεῖς θέσεις, οἷον 0,15307295. Διότι ὁ παρονομαστὴς τῶν νέων κλασμάτων εἶναι ἢ 100 ἢ 100000000 καὶ εἰς μὲν τὴν πρώτην περίστασιν ὑποχιλιαπλάσιος, εἰς δὲ τὴν δευτέραν χιλιαπλάσιος τοῦ δεδομένου· τοῦτο δέ, κατὰ τὰς ἀρχὰς τῶν κλασμάτων (ἀριθ. 82), προσδιορίζει καὶ τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ ἀνάλογον αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν.

Ἀλλὰ περὶ τούτων πληροφορούμεθα πρὸς τούτοις καὶ διὰ τῆς ἀμέσου ταύτης παρατηρήσεως. Ἐπειδὴ διὰ τὴν μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς μεταβάλλεται καὶ ἡ σχετικὴ τιμὴ τῶν χαρακτήρων, καὶ ἕκαστος αὐτῶν γίνεται δεκάκις ἢ ἑκατοντάκις κτλ. μεγαλήτερος ἢ μικρότερος, ἄρα καὶ τὸ σύνολον αὐτῶν παριστάνει ἀριθμὸν δεκάκις ἢ ἑκατοντάκις κτλ. μεγαλήτερον ἢ μικρότερον.

148. Γ΄. Ἂν πρὸς τὰ δεξιὰ δεκαδικοῦ τινος κλάσματος γράψωμεν ὅσα δήποτε μηδενικά, ἡ τιμὴ αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται.

Οὕτω 3,415 ἰσοδυναμεῖ μὲ 3,4150 ἢ 3,41500 κτλ.

Τῷ ὄντι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γραφόμενοι διὰ παρονομαστῶν παριστάνονται διὰ τῶν ἰσοδυνάμων κλασματικῶν $\frac{3415}{1000}$, $\frac{34150}{10000}$, $\frac{341500}{100000}$ κτλ. διότι ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ πρώτου πολυπλασιάζονται ἐπὶ 10, 100, κτλ.

Ἢ ἄλλως, ἐπειδὴ τὰ προσγραφόμενα μηδενικὰ δὲν μεταβάλλουσι τὴν σχετικὴν τιμὴν τῶν δεκαδικῶν χαρακτήρων, αὐτὰ δὲ καθ᾽ ἑαυτὰ δὲν ἔχουσι τιμήν τινα, διὰ τοῦτο δὲν μεταβάλλεται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος.

Διὰ τῶν μεταμορφώσεων τούτων ἡ ἀγωγὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καθίσταται ἔργον ἁπλούστατον. Π. χ. τὰ ἑτεροειδῆ κλάσματα 12,407 | 0,25 | 7,0456 | 23,4 | ἄγονται εἰς τὰ ὁμοειδῆ ἢ μᾶλλον τὰ ὁμώνυμα 12,4070 | 0,2500 | 7,0456 | 23,4000, κοινὸς παρονομαστὴς τῶν ὁποίων εἶναι 10000.

Μετὰ τὰς εἰσαγωγικὰς ταύτας παρατηρήσεις μεταβαίνομεν ἤδη εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§. β΄. Περὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

149. *Πρόσθεσις καὶ Ἀφαίρεσις.*—Ἡ πρόσθεσις τῶν δεκαδικῶν κλασματικῶν ἐκτελεῖται ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἀνάγομεν κατὰ πρῶτον τοὺς προσθετέους εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, συμπληροῦντες διὰ μηδενικῶν τοὺς ἔχοντας ὀλιγωτέρους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, καὶ προσθέτομεν αὐτοὺς ὡς ἂν ἦσαν ἀκέραιοι ἀριθμοὶ, εἰς δὲ τὸ ἐξαγόμενον διακρίνομεν δι᾽ ὑποδιαστολῆς τόσους πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῆς δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, ὅσους εἶχεν ὁ εἷς τῶν προσθετέων, ἢ μᾶλλον ἐκεῖνος ἐξ αὐτῶν, ὅστις ἔλαχε νὰ ἔχῃ τοὺς περισσοτέρους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας. Ὁ κανὼν οὗτος ἀποδεικνύεται ἐξ ὅσων διελάβομεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων, ἓν δὲ καὶ μόνον παράδειγμα ἀρκεῖ εἰς διασάφησιν αὐτοῦ.

Ἔστωσαν οἱ προσθετέοι 32,4056. | 245,379. | 12,0476 | 9,38 | καὶ 459,2375.

Προσγράφοντες κατὰ πρῶτον εἰς τὰ δεξιὰ ἓν 0 εἰς τὸν δεύτερον καὶ δύο εἰς τὸν τέταρτον, θέτομεν αὐτοὺς μετὰ ταῦτα τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον εἰς διάταξιν προσθέσεως, καὶ ἀρχόμενοι δεξιόθεν ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων· ἀπὸ δὲ τοῦ ἀθροίσματος 758,4497 χωρίζομεν τέσσαρας δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, ὅπως ἐκφράσωμεν τὴν σημασίαν τοῦ ἀριθμοῦ εἰς μυριοστημόρια

$$\begin{array}{r} 32{,}4056 \\ 245{,}3790 \\ 12{,}0476 \\ 9{,}3800 \\ 459{,}2375 \\ \hline 758{,}4497 \\ \hline 121\ 2210 \end{array}$$

Εἰς τὸ πρακτικὸν συνήθως παραλείπομεν τὴν προσγραφὴν τῶν μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν προσθετέων τῶν ἐχόντων ὀλιγωτέρους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, ἀλλὰ προσέχομεν πάντοτε νὰ διατάξωμεν τοὺς ὁμοταγεῖς χαρακτῆρας ὑπὸ τὴν αὐτὴν στήλην.

Ἡ ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται ὁμοίως ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Τρέπομεν κατὰ πρῶτον τοὺς δύο ἀριθμοὺς εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν (ἀριθ. 148) καὶ προχωροῦμεν εἰς τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα.

Ἔστω π. χ· ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 62,09 νὰ ἀφαιρέσωμεν 23,0784. Τρέπομεν τὸν μειωτέον εἰς μυριοστημόρια καὶ ἀφαιροῦντες λαμβάνομεν ὑπόλοιπον, 39,0116 εἰς τὸ ὁποῖον διαστέλλομεν τοὺς πρὸς δεξιὰν τέσσαρας χαρακτῆρας, ἵν' ἀποδώσωμεν τὴν σημασίαν τοῦ ὑπολοίπου εἰς μυριοστημόρια.

$$\begin{array}{r} 62,0900 \\ 23,0784 \\ \hline 39,0116 \\ \hline 62,0900 \end{array}$$

Ὁ κανὼν οὗτος, ὡς καὶ ὁ τῆς προσθέσεως, ἐπιστηρίζεται εἰς τὴν ἰδιότητα τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ὅτι αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων σχηματίζονται κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καθ' ὃν καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων· ἐπομένως ὅ,τι εἴπομεν εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ὡς πρὸς τὰς κρατήσεις ἢ τὰ δανείσματα, τὰ αὐτὰ ἐφαρμόζονται καὶ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

150. *Πολυπλασιασμός.*—Ἵνα πολυπλασιάσωμεν δεκαδικοὺς κλασματικοὺς ἀριθμούς, πολυπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡς ἀκεραίους, εἰς δὲ τὸ γινόμενον χωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τόσους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, ὅσους εἶχον οἱ δύο παράγοντες.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 35,407 νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ 12,54

Κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τοῦ πολυπλασιασμοῦ εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον 44400378, εἰς τὸ ὁποῖον χωρίζομεν πέντε δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, τουτέστι τρεῖς διὰ τὸ κλασματικὸν τοῦ πολυπλασιαστέου καὶ δύο διὰ τὸ τοῦ πολυπλασιαστοῦ.

$$\begin{array}{r} 35,407 \\ 12,54 \\ \hline 141628 \\ 177035 \\ 70814 \\ 35407 \\ \hline 444,00378 \end{array}$$

Τὴν ἀλήθειαν τοῦ κανόνος τούτου ἀποδεικνύομεν κατὰ δύο τρόπους.

Α'. Ἀπόδειξις. — Ἂν οἱ δεδομένοι παράγοντες παρασταθῶσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν κοινοῦ κλάσματος $\frac{35407}{1000}$ καὶ $\frac{1254}{100}$, τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $\frac{44400378}{100000}$. Εἰς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ἀριθμητὴς μὲν εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, θεωρουμένων ὡς ἀκεραίων, παρονομαστὴς δὲ ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ὑπὸ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσα ὑπονοοῦνται εἰς τοὺς παρονομαστὰς τῶν δύο παραγόντων, ἢ μᾶλλον, ὅσους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας εἶχον οἱ δύο παράγοντες· ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ διὰ δεκαδικῆς γραφῆς, τιθεμένης τῆς ὑποδιαστολῆς μετὰ τὸν πέμπτον ἀπὸ τοῦ τελευταίου χαρακτῆρα· ἄρα 444, 00378 εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 35, 407 καὶ 12, 54.

Β'. Ἀπόδειξις.—Ἐπειδὴ, ἀφαιρεθείσης τῆς ὑποδιαστολῆς ἀπὸ τὸν πολυπλασιαστέον, ἐπολυπλασιάσαμεν αὐτὸν ἐπὶ 1000· ὡς ἐκ τούτου καὶ τὸ γινόμενον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ζητουμένου κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ ἀριθ. 77. Ὡσαύτως, ἐπειδὴ διὰ τὴν ἐξάλειψιν τῆς ὑποδιαστολῆς εἰς τὸν πολυπλασιαστὴν ἐπολυπλασιάσαμεν αὐτὸν ἐπὶ 100, ἐλάβομεν διὰ τοῦτο γινόμενον ἑκατοντάκις μεγαλήτερον τοῦ ζητουμένου. Οὕτω διὰ τὴν ἀπάλειψιν τῶν δύο ὑποδιαστολῶν ἐλάβομεν γινόμενον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἑκατοντάκις τὸ χιλιαπλάσιον τοῦ ζητουμένου. Ὅθεν, ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 100000, καὶ διὰ τοῦτο διαστέλλομεν πέντε δεκαδικοὺς χαρακτῆρας.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ συλλογισμὸς εἶναι ἀνάλογος, ἂν οἱ δύο παράγοντες εἶχον καὶ περισσοτέρους ἢ ὀλιγωτέρους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, διὰ τοῦτο ὁ ἀποδοθεὶς κανὼν τοῦ πολυπλασιασμοῦ εἶναι γενικὸς διὰ δύο οἱουσδήποτε δεκαδικοὺς παράγοντας.

Ἔσω πρὸς τούτοις ὁ ἀριθμὸς 0,03054 νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ 0,024.

Παραβλέποντες τὴν ὑποδιασολὴν καὶ πολυπλασιάζοντες τοὺς ἀκεραίους παράγοντας 3054 καὶ 24 λαμβάνομεν γινόμενον 73296 συγκροτούμενον ἐκ πέντε χαρακτήρων, ἐν ᾧ οἱ δύο παράγοντες, ὑπαγορεύουσι νὰ χωρίσωμεν ὀκτὼ δεκαδικοὺς χαρακτῆρας· γράφομεν διὰ τοῦτο πρὸς ἀριστερὰν τοῦ γινομένου τρία μηδενικὰ καὶ οὕτω παριστάνομεν ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου ὁ τελευταῖος χαρακτὴρ 6 ἐκφράζει δεκαδικὰ τῆς ὀγδόης τάξεως· γράφομεν δὲ καὶ ἕτερον 0 πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς εἰς ἀναπλήρωσιν τοῦ ἐλλείποντος ἀκεραίου· οὕτως ἔχομεν διὰ τὸ ζητούμενον γινόμενον 0,00073296. Ἀναλόγως πράττομεν καὶ εἰς ἄλλας ὁμοίας περιστάσεις.

Κατὰ τὸν ἀποδοθέντα κανόνα εὑρίσκομεν ὡσαύτως, ὅτι

ά. τὸ γινόμενον τοῦ 12, 16 ἐπὶ 0,98 εἶναι 11,9168.

β'. ὁμοίως 17 ἐπὶ 0,023 δίδει 0,391.

καὶ γ'. 0,0632 ἐπὶ 0,0012 δίδει 0,00007584 κτλ.

151. *Διαίρεσις*.—Καὶ ἡ πρᾶξις αὕτη ἐκτελεῖται ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἀνάγομεν κατὰ πρῶτον τοὺς δύο ὅρους εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν (ἀριθ. 148) καὶ ἐξαλείφοντες τὴν ὑποδιαστολὴν προβαίνομεν εἰς τὴν διαίρεσιν κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 43,047 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 2,53698.

4304700	[253698
1767720	16 $\frac{245532}{253698}$
245532	

Γράφομεν δύο μηδενικὰ πρὸς δεξιὰν τοῦ διαιρετέου καὶ ἐξαλείφοντες τὴν ὑποδιαςολὴν διαιροῦμεν τὸν ἀκέραιον διαιρετέον 4304700 διὰ τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου 253698 καὶ εὑρίσκομεν 16 $\frac{245532}{253698}$ διὰ τὸ ζητούμενον πηλίκον τῶν δύο δεδομένων δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Τὸν κανόνα τοῦτον ἀποδεικνύομεν παρομοίως κατὰ δύο τρόπους.

Α΄. Ἀπόδειξις.—Ἐπειδὴ οἱ προτεθέντες ἀριθμοὶ γράφονται καὶ κατὰ τὸν τύπον τῶν κοινῶν κλασμάτων $\frac{4304700}{100000}$ καὶ $\frac{253698}{100000}$. διαιροῦντες αὐτοὺς κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα (ἀριθ. 112) καὶ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα 100000 λαμβάνομεν πηλίκον $\frac{4304700}{253698}$, ἤτοι 16 $\frac{245532}{253698}$, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω.

Β΄. Ἀπόδειξις.—Ἐπειδὴ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν δύο ὅρων, ἐκθλιβομένης τῆς ὑποδιαστολῆς, πολυπλασιάζονται ἀμφότεροι οἱ ὅροι τῆς διαιρέσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 10, 100, 1000 κτλ. ὡς τύχῃ νὰ ἦναι ὁ κοινὸς παρονομαςὴς αὐτῶν, διὰ τοῦτο δὲν μεταβάλλεται τὸ πηλίκον (ἀριθ. 77).

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον εὑρίσκομεν παρομοίως, ὅτι 3,4703 διαιρούμενον διὰ 0,027 δίδει πηλίκον 128 $\frac{143}{270}$.

Ὁμοίως 0,596 διὰ 0,00201 δίδει πηλίκον 296 $\frac{104}{201}$ κτλ.

152. Ὅ,τι καθιστᾷ ἐλλιπῆ τὸν κανόνα τοῦτον εἶναι, ὅτι τὰ λαμβανόμενα πηλίκα ἐκφράζονται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον διὰ κοινῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἀκέραιός τις ἀριθμὸς, οἷος ἔτυχεν ὁ διαιρέτης, ἐν ᾧ διὰ τὸ ὁμοιόμορφον ἀπαιτεῖται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ τὸ πηλίκον ὡσαύτως διὰ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως. Ἐκ τούτου ἄρα προκύπτει τὸ ζήτημα νὰ ἐκτιμήσωμεν κοινόν τι κλάσμα εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν, ἤ, δοθέντος κοινοῦ τινος κλάσματος, νὰ τρέψωμεν αὐτὸ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν.

Ἔστω, φέρ' εἰπεῖν τὸ κλάσμα $\frac{15}{47}$.

150	[47
90	0,31914
430	
70	
230	
420	

Καθ' ὁποίαν σημασίαν καὶ ἂν θεωρήσωμεν τὸ κλάσμα, εἴτε ὡς πέντε καὶ δεκάκις τὸ τεσσαρακοστὸν ἕβδομον τῆς μονάδος, εἴτε ὡς τὸ τεσσαρακοστὸν ἕβδομον τῶν δεκαπέντε μονάδων, (ἀρ. 76) ὁ λόγος αὐτοῦ ὑπάρχει ἄμεσος πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα· καὶ ἐπειδὴ ἡ μονὰς δύναται 10 δεκατημόρια, ἕπεται ὅτι $\frac{15}{47}$ τῆς μονάδος ἰσοῦνται μὲ $\frac{150}{47}$ τοῦ δεκατημορίου αὐτῆς. Οὕτω διαιροῦντες 150 διὰ τοῦ 47 εὑρίσκομεν 3 δεκατημόρια, τὰ ὁποῖα γράφομεν δεξιόθεν τῆς ὑποδιαστολῆς· ὑπολείπονται δὲ καὶ 9 δεκατημόρια, τῶν ὁποίων πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ $\frac{1}{47}$, ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι 3 δεκατημόρια καὶ $\frac{9}{47}$ τοῦ δεκατημορίου. Παρομοίως ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{9}{47}$ ἀναφέρεται πρὸς τὸ δεκατημόριον, τοῦτο δὲ δύναται 10 ἑκατοστημόρια, ἄρα $\frac{9}{47}$ τοῦ δεκατημορίου ἰσοῦνται μὲ $\frac{90}{47}$ τοῦ ἑκατοστημορίου ἤτοι $1\frac{43}{47}$· ὅθεν τὸ δεδομένον κλάσμα $\frac{15}{47}$ ἰσοῦται μὲ $31\frac{43}{47}$ τοῦ ἑκατοστημορίου, ἤτοι $0,31\frac{43}{47}$. Ὡσαύτως ἐκτιμῶμεν καὶ τὸ κλάσμα τοῦτο $\frac{43}{47}$ ὡς ἔγγιστα εἰς χιλιοστημόρια καὶ ἐφεξῆς εἰς μυριοστημόρια κτλ. προσθέτοντες διαδοχικῶς τὸ μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου. Ἐπεκτείνομεν δὲ τὴν πρᾶξιν, ἕως ὅτου λάβωμεν τὸν ἱκανὸν ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν χαρακτήρων.

Ἐν γένει, ἵνα τρέψωμεν κοινόν τι κλάσμα εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν, διατάσσομεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ, ὡς εἰς τὴν διαίρεσιν καὶ γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, διὰ τὴν θέσιν τοῦ ἀκεραίου, γράφοντες δὲ τὸ 0 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου καὶ ὅλων τῶν ἐφεξῆς ὑπολοίπων λαμβάνομεν τοὺς μερικοὺς διαιρετέους, οἱ ὁποῖοι διαιρούμενοι διὰ τοῦ διαιρέτου παράγουσι διαδοχικῶς τοὺς δεκαδικοὺς χαρακτῆρας τοῦ πηλίκου. Ἐξακολουθοῦμεν δὲ τὴν πρᾶξιν, ἕως ὅτου ἐξαντληθῶσι τὰ ὑπόλοιπα, ἢ ἕως ἱκανοῦ τινος ἀριθμοῦ δεκαδικῶν χαρακτήρων· τὸ οὕτω δὲ προσδιοριζόμενον πηλίκον εἶναι τὸ ἰσοδύναμον δεκαδικὸν κλάσμα.

Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος ἦναι ἀνώτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τότε ἐξάγομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἀκέραιον, τὸ ὁποῖον γράφομεν πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς. Εἶτα δὲ προσδιορίζομεν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα.

Ὁ κανὼν οὗτος εἶναι ἀνάλογος μὲ τὸν ἀποδοθέντα εἰς τὸ Γ΄. Κεφάλαιον περὶ τῆς τροπῆς κλασματικοῦ τινος ἀριθμοῦ οἱουδήποτε εἰς ἰσοδύναμον συμμιγῆ.

Ἐπανερχόμεθα ἤδη εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα, καὶ ἔστω νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 43,047 διὰ τοῦ 2,53698 μέχρις $\frac{1}{1000}$· εὑρόντες κατὰ πρῶτον ὡς καὶ ἀνωτέρω, τὸ ἀκέραιον μέρος 16 τοῦ πηλίκου, γράφομεν νέον 0 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 245532 καὶ διαιροῦντες εὑρίσκομεν πηλίκον 9, τὸ ὁποῖον, καθὸ ἐκφράζον δεκατημόρια, γράφομεν μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν, καὶ ὁμοίως εἰς τὸ δεύτερον καὶ τρίτον ὑπόλοιπον προσγράφομεν τὸ μηδενικὸν καὶ ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν προσδιορίζομεν κατὰ τὰ 6 ἑκατοστημόρια καὶ 7 χιλιοστημόρια τοῦ πηλίκου. Οὕτω δὲ τὸ ὅλον πηλίκον 16,967 εἶναι τὸ ζητούμενον μεῖον $\frac{1}{1000}$ περίπου· διότι τὸ παρορώμενον τελευταῖον ὑπόλοιπον ἐκφράζει χιλιοστημόρια.

4304700	253698
1767720	16,967
2455320	
1720380	
1981920	
206034	

Εὑρίσκομεν παρομοίως, ὅτι 3,4703 διαιρούμενον διὰ 0,027 δίδει πηλίκον 128,5296 ὡς ἔγγιστα 0,0001.

Ὡσαύτως 0,596 διὰ τοῦ 0,00201 δίδει 296,51 ὡς ἔγγιστα 0,01 κτλ.

Ἐπειδὴ ἡ πρᾶξις τῆς τροπῆς κοινοῦ τινος κλάσματος εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν, παρουσιάζει πολλὰς ἰδιότητας ἀξίας σημειώσεως, τὰς ὁποίας δὲν δυνάμεθα ἐπὶ τοῦ παρόντος νὰ ἀναπτύξωμεν ἀρκούντως, θέλομεν συμπληρώσει διὰ τοῦτο τὴν θεωρίαν ταύτην εἰς τὸ Ε΄. κεφάλ. ὅτε θέλομεν θεωρήσει καὶ τὸ ἀντίστροφον ζήτημα, πῶς ἀπὸ δεκαδικοῦ τινος κλάσματος ἀνατρέχομεν εἰς τὸ κοινὸν, ἐξ οὗ προέκυψεν.

153. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἦναι ἀκέραιος, ἢ περιέχῃ ὀλιγωτέρους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, τότε παραλείπομεν τὴν προσγραφὴν τῶν μηδενικῶν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

Ἔστω π. χ. 437,4825 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 56.

```
437,4825[56
 454     7, 8121
  68
  122
   105
    49
```

Θεωροῦντες ἐνταῦθα τὴν διαίρεσιν ὡς πρᾶξιν, διὰ τῆς ὁποίας μερίζομεν τὸν διαιρετέον εἰς 56 ἴσα μέρη, (ἀριθ. 58), ἢ λαμβάνομεν τὸ $\frac{1}{56}$ αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν κατὰ πρῶτον τὸ $\frac{1}{56}$ τοῦ ἀκεραίου 437· ὅθεν εὑρίσκομεν πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 45· τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἀναλυόμενον εἰς δεκατημόρια καὶ ἑνούμενον μετὰ τῶν 4 δεκατημορίων τοῦ διαιρετέου, σχηματίζει τὸν μερικὸν διαιρετέον 454 δεκατημόρια, τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{56}$ εἶναι 8 μὲ ὑπόλοιπον 6 δεκατημόρια. Ὡσαύτως καταβιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 6 τὸν ἑφεξῆς χαρακτῆρα 8 τῶν ἑκατοστημορίων καὶ διαιροῦντες εὑρίσκομεν πηλίκον 1 ἑκατοστημόριον καὶ ὑπόλοιπον 12. Ὁμοίως καταβιβάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὰ χιλιοστημόρια καὶ μυριοστημόρια. Ὅθεν εὑρίσκομεν πηλίκον 7,8121 ὡς ἔγγιστα 0,0001. Ἂν θέλωμεν δὲ καὶ μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως, προσγράφομεν διαδοχικῶς τὸ μηδενικὸν εἰς τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον 49 καὶ τὰ μετ᾽ αὐτὸ κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα.

Εὑρίσκομεν παρομοίως, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 14,37586 διαιρούμενος διὰ τοῦ 219 δίδει πηλίκον 0,06564 μεῖον 0,00001 κτλ.

Ἔστω πρὸς τούτοις ὁ ἀριθμὸς 3,40567 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 0,039.

```
3405,67 [ 39
 285      87, 32
  126
   97
   19
```

Ἐπειδὴ κατὰ γνωστὴν ἀρχὴν τῆς διαιρέσεως (ἀριθ. 77), πολυπλασιαζομένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτῆς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, δὲν μεταβάλλεται τὸ πηλίκον, διὰ τοῦτο πολυπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ 1000· οὕτω δὲ ἀντὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν 3405,67 διὰ τοῦ 39, καὶ ἐπομένως ἡ πρᾶξις ἐκτελεῖται ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ προηγουμένου παραδείγματος.

Ἐν γένει, ὅταν ὁ διαιρετέος περιέχῃ περισσοτέρους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας ἀπὸ τὸν διαιρέτην, ἀπαλείφομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀπὸ τὸν διαιρέτην, εἰς δὲ τὸν διαιρετέον προχωροῦμεν αὐτὴν πρὸς τὰ δεξιὰ τόσας θέσεις, ὅσοι ἦσαν οἱ δεκαδικοὶ χαρακτῆρες τοῦ διαιρετέου καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ὡς εἰς τὴν περίστασιν, καθ' ἣν ὁ διαιρετέος μόνος ἔχει δεκαδικοὺς χαρακτῆρας.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἂν ὁ διαιρέτης ἦναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, λήγων εἰς μηδενικὰ, δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τὰ μηδενικὰ ταῦτα καὶ νὰ προχωρήσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸν διαιρετέον τόσας θέσεις πρὸς ἀριστερὰν, ὅσα εἶναι τὰ πρὸς τὰ δεξιὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου.

Π. χ. 234,15 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 8900· ἄγεται εἰς 2,3415 νὰ διαιρεθῇ διὰ 89. Διότι διὰ τῆς πράξεως ταύτης διαιροῦνται ἀμφότεροι ο ὅροι διὰ τοῦ 100 καὶ ἐπομένως δὲν μεταβάλλεται τὸ πηλίκον.

Τὰ ἑξῆς παραδείγματα ἀναφέρονται εἰς ὅλας τὰς εἰρημένας περιστάσεις τῆς διαιρέσεως.

Α'. Ἡ διαίρεσις τοῦ 21,234 διὰ τοῦ 59,37469 δίδει πηλίκον 0,357 ὡς ἔγγιστα 0,001.

Β'. Ὁ ἀριθμὸς 294 διαιρούμενος διὰ τοῦ 7,256 δίδει 40,5181 ὡς ἔγγιστα 0,0001.

Γ'. Ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 0,004736 διὰ τοῦ 0,034 προκύπτει πηλίκον 0,13929 ὡς ἔγγιστα 0,00001.

Σημειοῦμεν τελευταῖον ὅτι ἡ βάσανος τοῦ πολυπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως ἐκτελεῖται καὶ ἐνταῦθα, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων, ἐξ ὑπαμοιβῆς· τουτέστιν ἡ τοῦ πολυπλασιασμοῦ διὰ τῆς διαιρέσεως καὶ ἡ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ πολυπλασιασμοῦ.

§. γ'. Μέθοδος σύντομος διὰ τὸν πολυπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

154. *Σύντομος μέθοδος τοῦ πολυπλασιασμοῦ.*—Κατὰ τὸν ἀποδοθέντα γενικὸν κανόνα τοῦ πολυπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν τὸ γινόμενον περιέχει τόσους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, ὅσους ἀμφότεροι οἱ παράγοντες. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον παραλείπομεν τοὺς τελευταίους ἐξ αὐτῶν, διὰ τοῦτο συμφέρει νὰ γνωρίζωμεν μέθοδον, διὰ τῆς ὁποίας νὰ προσδιορίζω-

μεν μόνους τοὺς ἀναγκαίους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, χωρὶς νὰ ὑποχρεούμεθα εἰς ὁλόκληρον τὴν πρᾶξιν τοῦ πολυπλασιασμοῦ.

Ἔστω π. χ. νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 34,253467 ἐπὶ 5,4637 μόνον μέχρι χιλιοστημορίων, ἤτοι μεῖον 0,001.

Φανερὸν, ὅτι ἐπιτυγχάνεται ὁ σκοπὸς τῆς μεθόδου, ἂν ἐξ ὅλων τῶν μερικῶν γινομένων, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν ἐκ τοῦ πολυπλασιασμοῦ ἑνὸς ἑκάστου χαρακτῆρος τοῦ πολυπλασιαστέου ἐφ᾽ ἕνα ἕκαστον χαρακτῆρα τοῦ πολυπλασιαστοῦ, διακρίνωμεν ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἐκφράζουσι χιλιοστημόρια καὶ ἀνωτέρας τάξεως μονάδας, ἀπὸ τὰ μυριοστημόρια καὶ τὰ τούτων ὑποδεέστερα· διότι οὕτως ὑπολογίζοντες μόνον τὰ πρῶτα λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον. Ἰδοὺ πῶς δυνάμεθα νὰ κατορθώσωμεν τὴν τοιαύτην διάκρισιν· ἵνα ἤμεθα δὲ ἐντελῶς πεπεισμένοι περὶ τῆς ἀκριβείας τῶν χιλιοστημορίων, προσδιορίζομεν τὸ γινόμενον ὡς ἔγγιστα 0,0001.

Ἀντιστρέφομεν τὴν τάξιν τῶν χαρακτήρων τοῦ πολυπλασιαστοῦ καὶ ἔχομεν 7364, 5· γράφομεν αὐτὸν, οὕτως ἀντεστραμμένον, ὑπὸ τὸν πολυπλασιαστέον· ὥστε ὁ χαρακτὴρ 5 τῶν μονάδων τοῦ πολυπλασιαστοῦ νὰ ἦναι ὑπὸ τὸν χαρακτῆρα 4 τῶν μυριοστημορίων τοῦ πολυπλασιαστέου, οἱ δὲ ἐφεξῆς χαρακτῆρες τῶν δεκατημορίων, ἑκατοστημορίων κτλ. τοῦ πολυπλασιαστοῦ, οἱ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν 5 μονάδων, νὰ ἦναι διαδοχικῶς κάτωθι τῶν χιλιοστημορίων, ἑκατοστημορίων κτλ. τοῦ πολυπλασιαστέου· ἂν δὲ ὁ πολυπλασιαστὴς ἐμπεριέχῃ καὶ δεκάδας ἢ ἑκατοντάδας κτλ. γράφομεν τοὺς χαρακτῆρας αὐτῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν μονάδων καὶ κάτωθι τῶν ἑκατογχιλιοστημορίων, ἑκατομμυριοστημορίων κτλ. τοῦ πολυπλασιαστέου. Ἐν ἑνὶ λόγῳ τοποθετοῦμεν ἕκαστον χαρακτῆρα τοῦ πολυπλασιαστοῦ ὑποκάτω ἐκείνου τοῦ χαρακτῆρος τοῦ πολυπλασιαστέου, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν τοῦ πολυπλασιαστοῦ δίδει μυριοστημόρια.

Μετὰ ταῦτα πολυπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν πρῶτον χαρακτῆρα 5 τοῦ πολυπλασιαστοῦ μόνον τὸν κατακόρυφον αὐτοῦ 4 εἰς τὸν πολυπλασιαστέον καὶ ὅλους τοὺς πρὸ αὐτοῦ, καὶ ἀμελοῦμεν τὸ γινόμενον τῶν 67 ἑκατομμυριοστημορίων τοῦ πολυπλασιαστέου ἐπὶ 5, καθὸ ἐκφράζον ἑκατομμυριοστημόρια. Λαμβάνομεν δὲ μόνον 3 μονάδας ἀπὸ τὸν πολυπλασιασμὸν τοῦ 6 ἐπὶ 5, τὰς ὁποίας προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν 4 μυριοστημορίων. Οὕτως ἔχομεν τὸ πρῶτον μερικὸν γινόμενον 1712673 μυριοστημόρια.

```
34, 2534 67
 7, 364, 5
-----------
  1712673
   137013
    20552
     1027
      239
-----------
187, 1504
```

Ὁμοίως ἐπὶ τὸν ἄμεσον χαρακτῆρα 4 τῶν δεκατημορίων τοῦ πολυπλασιαστοῦ πολυπλασιάζομεν τὸν πολυπλασιαστέον ἀρχόμενοι ἀπὸ τὸν κατακόρυφον χαρακτῆρα 3 καὶ ἀμελοῦντες τὸ γινόμενον τοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ μέρους 467, ἐκτὸς τῆς παραγομένης μονάδος, ἀπὸ τὸν πολυπλασιασμὸν τοῦ 4 ἐπὶ 4, τὴν ὁποίαν συμπεριλαμβάνομεν εἰς τὸ δεύτερον μερικὸν γινόμενον. Οὕτως εὑρίσκομεν 137013 μυριοστημόρια.

Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ διὰ τὸν χαρακτῆρα 6 τῶν ἑκατοστημορίων τοῦ πολυπλασιαστοῦ, τουτέστι πολυπλασιάζοντες 34, 25 ἐπὶ 6 λαμβάνομεν 20550 μυριοστημόρια, εἰς τὰ ὁποῖα προσθέτομεν καὶ 2 μυριοστημόρια προκύπτοντα ἀπὸ τὸ γινόμενον 18, ἐκλαμβανόμενον ὡς 20, τοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ παραλειπομένου χαρακτῆρος 6 ἐπὶ τὸν χαρακτῆρα 3 τοῦ πολυπλασιαστοῦ· καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ τρίτον μερικὸν γινόμενον 20552, μυριοστημόρια.

Παρομοίως προσδιορίζομεν καὶ τὸ τέταρτον μερικὸν γινόμενον 1027 τοῦ 342 ἐπὶ 3 καὶ τέλος τὸ πέμπτον 239 τοῦ πολυπλασιαζομένου μέρους 34 ἐπὶ τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα 7 τοῦ πολυπλασιαστοῦ.

Προσθέτοντες τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος διακρίνοντες τοὺς τέσσαρας δεκαδικοὺς χαρακτῆρας λαμβάνομεν ὅλον τὸ γινόμενον 187, 1504, καὶ παρορῶντες τὸν ὡς ἐκ περισσοῦ εὑρεθέντα τελευταῖον χαρακτῆρα 4, ὡς ὑποκύπτοντα εἰς λάθη λαμβάνομεν 187, 150 μεῖον 0, 001.

Ἔστω καὶ δεύτερον παράδειγμα. Νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 763, 0540367956 καὶ 254, 4630578 μεῖον 0, 00001.

Ἐν πρώτοις ἵνα ἔχωμεν ἀκριβῆ τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα τῶν ἑκατογχιλιοστημορίων, προσδιορίζομεν καὶ τὰ ἑκατομμυριοστημόρια τοῦ γινομένου, ἀντιστρέφοντες δὲ τὴν τάξιν τῶν χαρακτήρων τοῦ πολυπλασιαστοῦ γράφομεν αὐτὸν ὑπὸ τὸν πολυπλασιαστέον· ὥστε ὁ χαρακτὴρ 4 τῶν μονάδων τοῦ πολυπλασιαστοῦ νὰ ἦναι ὑπὸ τὰ ἑκατομμυριοστημόρια τοῦ πολυπλασιαστέου. Διότι ἑκατομμυριοστημόρια ἐπὶ μονάδας ἁπλᾶς δίδουσιν ἑκατομμυριοστημόρια καὶ ἀνωτέρω. Οἱ δὲ λοιποὶ χαρακτῆρες νὰ κῆνται οἱ μὲν τῶν δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων πρὸς τὰ δεξιὰ, οἱ δὲ τῶν δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ χαρακτῆρος τῶν μονάδων. καὶ ἐκτελοῦμεν τὸν πολυπλασιασμὸν ὡς ἀνωτέρω.

Εἰς τὸ πρῶτον μερικὸν γινόμενον ἐπὶ 2, ηὐξήσαμεν τὸ γινόμενον 16 τοῦ 8 ἐπὶ 2 κατὰ 2 μονάδας προερχομένας ἐκ τοῦ γινομένου 18 τοῦ ἑπομένου χαρακτῆρος 9 ἐπὶ 2, τὸ ὁποῖον ἐκλαμβάνομεν ὡς δύο ἑκατομμυριοστημόρια, παρομοίως εἰς τὸ δεύτερον μερικὸν γινόμενον ὑπελογίσαμεν καὶ τὰ 4 ἑκατομμυριοστημόρια τοῦ γινομένου τοῦ 8 ἐπὶ 5. Εἰς τὸ τρίτον ὑπελογίσαμεν καὶ τὰ τρία ἑκατομμυριοστημόρια, τὰ ἐκ τοῦ πολυπλασιασμοῦ τοῦ 7 ἐπὶ 4. Εἰς δὲ τὸ τέταρτον τὰ 2 προερχόμενα ἀπὸ τὸν πολυπλασιασμὸν τοῦ 6 ἐπὶ 4

763, 05403678956
87, 50364452
152610807358
38152701839
3052216147
305221614
45783242
2289162
38152
5341
610
194169, 06346(5

κτλ. ἐν γένει ἐκ τοῦ γινομένου τοῦ ἀμέσως παρορωμένου χαρακτῆρος λαμβάνομεν πάντοτε ἀκεραίας δεκάδας· πρὸς τοῦτο δὲ παραιτοῦμεν τὰς μονάδας αὐτοῦ, ὁσάκις εἶναι 5 ἢ ὀλιγώτεραι καὶ ἐκλαμβάνομεν αὐτὰς ὡς μίαν δεκάδα, ὁσάκις εἶναι ὑπὲρ τὰς 5· διότι οὕτω πράττομεν εἶδός τι ἐπαμοιβῆς τῶν αὐξήσεων καὶ ἐλαττώσεων.

155. Συμβαίνει ἐνίοτε νὰ μὴ ὑπάρχωσιν εἰς τὸν πολυπλασιαστέον τόσοι δεκαδικοὶ χαρακτῆρες, ὥστε νὰ ἀνταποκρίνωνται γραφόμενοι ὑπ' αὐτοὺς ὅλοι οἱ ἀνώτεροι χαρακτῆρες τοῦ πολυπλασιαστοῦ. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πολυπλασιαστέου τὸν ἱκανὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν.

Π. χ. ζητοῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ 1825, 4037 ἐπὶ 2427, 125, ἐκτιμώμενον ἀκριβῶς ἕως μυριοστημορίων.

Ἀντιστρέφοντες τὴν τάξιν τῶν χαρακτήρων τοῦ πολυπλασιαστοῦ ἔχομεν 521, 7242· ὅθεν πρέπει νὰ γράψωμεν τὰς μὲν 7 μονάδας αὐτοῦ ὑπὸ τὰ ἑκατογχιλιοστημόρια. τὰς δὲ 2 δεκάδας ὑπὸ τὰ ἑκατομμυριοστημόρια κτλ. Καὶ ἐπειδὴ ἐλλείπουσιν εἰς τὸν πολυπλασιαστέον δεκαδικαὶ ὑποδιαιρέσεις, ἀναπληροῦμεν αὐτὰς διὰ τῶν μηδενικῶν. Καὶ οὕτως ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν, ὡς ἀνωτέρω, καὶ εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον.

1825, 40370000
5217242
365080740000
73016148000
3650807400
1277782590
18254037
3650807
912701
4430482, 9553(5

156. *Σύντομος μέθοδος τῆς διαιρέσεως.* — Ἡ διαίρεσις ἀποβαίνει ἐπιπονωτέρα, καθόσον εἶναι περισσότεροι οἱ χαρακτῆρες τοῦ διαιρέτου· τοῦτο δὲ συμβαίνει συχνότατα εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν μετὰ τὴν

ἀπάλειψιν τῆς ὑποδιαστολῆς. Συμφέρει διὰ τοῦτο νὰ γνωρίσωμεν τρόπον συντομώτερον τῆς εὑρέσεως τοῦ πηλίκου κατά τινα βαθμὸν προσεγγίσεως, ἀντὶ τοῦ συσταθέντος γενικοῦ κανόνος.

Θεωροῦμεν κατὰ πρῶτον τὴν περίστασιν καθ' ἣν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τῆς διαιρέσεως εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, καὶ ζητοῦμεν διὰ συντομωτέρου τρόπου νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πηλίκον ὡς ἔγγιστα μονάδος. Ἐκ τούτου δὲ ῥᾳδίως ἐφαρμόζομεν τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ εἰς τὴν περίστασιν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων καὶ εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον ὡς ἔγγιστα μονάδος δεκαδικῆς τινος ὑποδιαιρέσεως.

Ἐπειδὴ κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως ὁ προσδιορισμὸς ἑκάστου χαρακτῆρος τοῦ πηλίκου ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν διαίρεσιν τῶν δύο ἢ τῶν τριῶν πρώτων χαρακτήρων τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἑνὸς ἢ τῶν δύο πρώτων τοῦ διαιρέτου, συμπεραίνομεν ἐκ τούτου, ὅτι δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς ἀληθεῖς χαρακτῆρας τοῦ πηλίκου διὰ μόνων τῶν μικρῶν τούτων διαιρέσεων, χωρὶς νὰ ἐμπεριλάβωμεν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοὺς τελευταίους χαρακτῆρας ἑκάστου μερικοῦ διαιρετέου. Αὕτη εἶναι ἡ ἀρχὴ ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος μέθοδος· ὁδηγούμεθα δὲ εἰς τὸ τέλος τοῦτο κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

Χωρίζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τόσους χαρακτῆρας, ὅσους ἔχει ὁ διαιρέτης μεῖον δύο· καὶ διαιροῦμεν ἐφεξῆς τὸ πρὸς ἀριστερὰν μέρος αὐτοῦ διὰ τοῦ δεδομένου διαιρέτου κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα. Καὶ εἰ μὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου τόσα μηδενικά, ὅσοι εἶναι οἱ ἐκθλιβέντες χαρακτῆρες τοῦ διαιρετέου· εἰ δὲ μείνῃ ὑπόλοιπον, ὡς συμβαίνει σχεδὸν πάντοτε, τότε διαιροῦμεν αὐτὸ οὐχὶ πλέον διὰ τοῦ ἰδίου διαιρέτου, διότι εἶναι ἀδύνατον, ἀλλὰ διὰ διαιρέτου, τὸν ὁποῖον θέλομεν σχηματίσει, ἀφ' οὗ ἐξαλείψωμεν τὸν πρὸς τὰ δεξιὰ τελευταῖον χαρακτῆρα τοῦ δεδομένου. Ἐν τοσούτῳ εἰς τὸν πολυπλασιασμὸν τοῦ διαιρέτου τούτου ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα χαρακτῆρα εἰς τὸ πηλίκον ὑπολογίζομεν καὶ τὰς προερχομένας μονάδας ἐκ τοῦ γινομένου τοῦ ἐκθλιβέντος χαρακτῆρος τοῦ διαιρέτου. Οὕτω λαμβάνομεν δεύτερον ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον διαιροῦμεν διὰ τοῦ προηγουμένου διαιρέτου, ἀφ' οὗ ἐκθλίψωμεν τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα αὐτοῦ, καὶ ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκθλίβοντες ἕνα χαρακτῆρα ἀπὸ τὸν διαιρέτην ἀνὰ πᾶν διαιρούμενον ὑπόλοιπον, ἑωσότου νὰ διαιρέσωμεν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον διὰ τοῦ πρώτου χαρακτῆρος τοῦ διαιρέτου· ἀπὸ τοῦ ὅλου δὲ εὑρεθέντος πηλίκου ἐκθλίβομεν τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα.

Σαφηνείας ἕνεκα ἐφαρμόζομεν τὸν ἐκτεθέντα κανόνα ἐπὶ μερικοῦ παραδείγματος, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν καὶ κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω μέθοδον.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 430456896 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 5683.

430456896	5683	4304568|96	5683
32646	75744	32646	757|44(6
42318		42318	
25379		2537	
26476		264	
3744		37	
		4	

Ἀνάπτυξις.—Ἡ μὲν πρώτη πρᾶξις πρὸς ἀριστερὰν ἐγένετο κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα, ὅθεν εἶναι περιττὸν νὰ ἐνδιατρίψωμεν· ἡ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ ἐγένετο κατὰ τὴν ἄνω ἐκτεθεῖσαν σύντομον μέθοδον. Εὕρομεν δὲ καὶ διὰ τῆς πρώτης καὶ διὰ τῆς δευτέρας τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον 75744, καθόσον ἀφορᾷ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου. Οὕτως ἡ διαφορὰ ἐνυπάρχει μόνον εἰς τὸ προστιθέμενον κλάσμα. Ἰδοὺ ἡ σειρὰ τῶν μερικῶν ἐργασιῶν τῆς δευτέρας πράξεως.

Ἐχωρίσαμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου δύο χαρακτῆρας, ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης ἔχει τέσσαρας καὶ διαιρέσαντες τὸ λοιπὸν πρὸς ἀριστερὰν μέρος 4304568 κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα εὕρομεν πηλίκον 757 καὶ ὑπόλοιπον 2537.

Μετὰ ταῦτα, ἀντὶ νὰ καταβιβάσωμεν καὶ τὸν ἐφεξῆς χαρακτῆρα τοῦ διαιρετέου καὶ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἐθεωρήσαμεν αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπον 2537, ὡς μερικὸν διαιρετέον τῶν 568 δεκάδων τοῦ δεδομένου διαιρέτου καὶ τοῦ ἀγνώστου ἐφεξῆς χαρακτῆρος τοῦ πηλίκου· τουτέστιν ἐξεθλίψαμεν τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα 3 τῶν μονάδων τοῦ διαιρέτου καὶ διῃρέσαμεν μόνον τὸ ὑπόλοιπον 2537 διὰ τοῦ 568. Οὕτως εὕρομεν 4 ὡς νέον χαρακτῆρα τοῦ πηλίκου. Εἰς τὸν σχηματισμὸν δὲ τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου 568 ἐπὶ τὸν χαρακτῆρα 4 τοῦ πηλίκου συμπεριελάβομεν καὶ τὴν μίαν δεκάδα, τὴν προερχομένην ἀπὸ τὸν πολυπλασιασμὸν τοῦ ἐκθλιβέντος χαρακτῆρος 3 ἐπὶ τὸν 4· οὕτως ἀφαιρέσαντες τὸ γινόμενον εὕρομεν νέον ὑπόλοιπον 264.

Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἐθεωρήσαμεν ὡσαύτως ὡς διαιρετέον τοῦ 56 καὶ τοῦ ἐφεξῆς χαρακτῆρος τοῦ πηλίκου· τουτέστιν ἐκθλίψαντες τὸν χαρακτῆρα 8 τῶν δεκάδων τοῦ διαιρέτου, διῃρέσαμεν τὸν 264 διὰ τοῦ 56 καὶ οὕτως εὕρομεν πηλίκον 4. Πολυπλασιάσαντες δὲ τὸν 56 ἐπὶ 4 καὶ συμπεριλαβόντες καὶ τὰς 3 ἑκατοντάδας, τὰς ἐκ τοῦ γινομένου 32 τοῦ ἐκθλιβέντος χαρακτῆρος 8 τῶν δεκάδων ἐπὶ 4, ἀφηρέσαμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸν διαιρετέον 264 καὶ οὕτως εὕρομεν νέον ὑπόλοιπον 37.

Ὁμοίως εἰργάσθημεν ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου 37, τουτέστι ἐξεθλίψαμεν τὸν χαρακτῆρα 6 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ διαιρέτου καὶ διαιρέσαντες 37 διὰ τοῦ 5, εὕρομεν τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα 6 τοῦ πηλίκου. Πολυπλασιάσαντες δὲ τὸν διαιρέτην 5 ἐπὶ 6 καὶ προσθέσαντες εἰς τὸ γινόμενον 30 καὶ τὰς 3 χιλιάδας, τὰς προερχομένας ἀπὸ τὸν πολυπλασιασμὸν τοῦ 6 ἐπὶ 6, ἐλάβομεν γινόμενον 33, τὸ ὁποῖον ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 37 ἔδωκεν ὑπόλοιπον 4.

Τέλος διεγράψαμεν τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα 6 τοῦ πηλίκου καὶ εὕρομεν διὰ τὸ ὅλον πηλίκον 75744, διαφέρον τοῦ ἀκριβοῦς ὀλιγώτερον μονάδος.

157. Ἔπρεπε κυρίως νὰ χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τόσους χαρακτῆρας, ὅσους ἔχει ὁ διαιρέτης μεῖον ἑνός, ἤτοι ὅσοι εἶναι ἐκθλιβόμενοι χαρακτῆρες εἰς τὸν διαιρέτην. Οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἔπρεπε νὰ χωρίσωμεν τρεῖς χαρακτῆρας ἀντὶ δύο, τουτέστι τὸ μέρος 896. Διότι ἐντὸς αὐτοῦ ἐμπεριέχονται γινόμενα τῶν ἐκθλιβομένων χαρακτήρων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς τελευταίους χαρακτῆρας τοῦ πηλίκου, ὡς πληροφορούμεθα ἀπὸ τὴν πρᾶξιν τῆς κοινῆς διαιρέσεως. Ἀλλ' ἐπειδὴ χωρίζομεν ἕνα χαρακτῆρα πλέον τοῦ δέοντος, διὰ τοῦτο λαμβάνομεν καὶ ἕνα χαρακτῆρα εἰς τὸ πηλίκον ὡς ἐκ περισσοῦ, τὸν ὁποῖον διὰ τοῦτο καὶ διαγράφομεν.

Ἀναπτύσσομεν λεπτομερέστερον τὴν ἰδέαν ταύτην ἐπὶ τοῦ παραδείγματος, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ὑπεστρωμένην τὴν πρᾶξιν κατ' ἀμφοτέρας τὰς μεθόδους. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ τελευταῖος χαρακτὴρ 4 τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου, πολυπλασιάζων τὰς 6 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρέτου, δίδει γινόμενον ἑκατοντάδας, αἱ ὁποῖαι ἑπομένως ἐμπεριελήφθησαν ἐντὸς τῶν 8 ἑκατοντάδων τοῦ διαιρετέου καὶ ἀνωτέρω. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἐκθλίβοντες ἐξ ἑνὸς τὸν χαρακτῆρα 6 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ διαιρέτου πρέπει νὰ παραβλέψωμεν ἐξ ἑτέρου καὶ τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων εἰς τὸν διαιρετέον, εἰς τὴν ὁποίαν εἰσέρχεται τὸ παρορώμενον γινόμενον τῶν 6 ἑκατοντάδων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πηλίκου· μὴ ἀποχωρίσαντες δὲ τὰς ἑκατοντάδας ὑπελάβομεν τὰς 9 δεκάδας τοῦ διαιρετέου ἀντὶ 9 ἑκατοντάδων καὶ τὰς 6 μονάδας ἀντὶ τοσούτων δεκάδων, τουτέστιν ἐθεωρήσαμεν τὸν διαιρετέον ὡς παρακολουθούμενον ἀπὸ ἓν μηδενικὸν καὶ ἑπομένως δεκαπλάσιον τοῦ δέοντος. Ὅθεν καὶ τὸ πηλίκον 757446 εὑρέθη δεκαπλάσιον τοῦ ζητουμένου. Ὅθεν, ἵνα προσδιορίσωμεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον, ἀνάγκη νὰ διαστείλωμεν τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα, τὸν ὁποῖον καὶ διαγράφομεν, καὶ διότι εὑρέθη ὡς ἐκ περισσοῦ καὶ διότι ὑποκύπτει εἰς λάθη· ὡς συμβαίνει συνήθως διὰ τὰ παραλειπόμενα γινόμενα τῶν ἐκθλιβομένων χαρακτήρων, τὰ ὁποῖα ὡς ἔγγιστα ἰσοτιμήσαμεν μὲ τὸ ἀποχωρισθὲν μέρος τοῦ διαιρετέου.

158 Ἔστω καὶ δεύτερον παράδειγμα νὰ διαιρέσωμεν

540347056789046 διὰ τοῦ 2786459.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης ἔχει ἑπτὰ χαρακτῆρας, διὰ τοῦτο χωρίζομεν εἰς τὸν διαιρετέον πέντε, τουτέστι δύο ὀλιγώτερον· καὶ διαιροῦντες τὸ πρὸς ἀριστερὰν μέρος τοῦ διαιρετέου κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα εὑρίσκομεν πηλίκον 1939 καὶ ὑπόλοιπον 526566.

Μετὰ ταῦτα ἐκθλίβοντες τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα 9 τοῦ διαιρέτου διαιροῦμεν τὸ ὑπόλοιπον 526566 διὰ τοῦ 278645, ὅθεν λαμβάνομεν 1 εἰς τὸ πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον 247921. Διαιροῦντες ὡσαύτως τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο διὰ τοῦ 27864 λαμβάνομεν πηλίκον 8 καὶ ὑπόλοιπον 25005, τὸ ὁποῖον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 2786, καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως τοῦ παρατελευταίου 13, τὸ ὁποῖον διαιρούμενον διὰ τοῦ 2 δίδει πηλίκον 4· διαγράφοντες δὲ τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα τοῦ πηλίκου λαμβάνομεν 193918897 διὰ τὸ ὅλον ζητούμενον πηλίκον.

```
5403470567 | 89046 | 2786459
                   ---------------
 26170115            1939 | 18897(4
  10919846
   25604697
     526566
     247921
      25005
       2714
        297
         13
          3
```

159. Ἂν κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς πράξεως, ἀφ' οὗ χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τόσους χαρακτῆρας, ὅσους ἀπαιτεῖ ἡ μέθοδος, τὸ ἐφεξῆς πρὸς ἀριστερὰν μέρος τοῦ διαιρετέου δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ διαιρέτου, ἐκθλίβομεν ἀμέσως τὸν πρὸς τὰ δεξιὰ χαρακτῆρα τῶν μονάδων τοῦ διαιρέτου, ἢ καὶ τὸν τῶν δεκάδων κτλ. ἑωσότου οἱ μένοντες χαρακτῆρες εἰς τὸν διαιρέτην νὰ σχηματίζωσιν ἀριθμὸν, εἰσερχόμενον εἰς τὸ πρὸς ἀριστερὰν μέρος τοῦ διαιρετέου. Οὕτω δὲ προβαίνομεν ἀμέσως εἰς τὴν πρᾶξιν κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν μέθοδον.

Ἔστω π. χ. νὰ διαιρέσωμεν 30564897 διὰ 67364.

30564 | 897		67364
3619		453(7
251		
50		
4		

Χωρίσαντες τοὺς τρεῖς πρὸς τὰ δεξιὰ χαρακτῆρας ἐλάβομεν τὸ πρὸς ἀριστερὰν μέρος 30564 μικρότερον τοῦ διαιρέτου 67364· ὅθεν ἐκθλίψαντες τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα 4 τοῦ διαιρέτου προέβημεν εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ 30564 διὰ τοῦ 6736 καὶ μετ' αὐτὴν εἰς τὰς ἄλλας ἐργασίας κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν μέθοδον.

160. Κατὰ τὰς αὐτὰς ἀρχὰς δυνάμεθα ἤδη νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν, ὁσάκις ζητοῦμεν τὸ πηλίκον ὡς ἔγγιστα μονάδος μιᾶς τινος ὑποδιαιρέσεως.

Ἔστω π. χ. 1234,569 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 27,35894 καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον ὡς ἔγγιστα 0,001.

Ἄγοντες κατὰ πρῶτον τοὺς ὅρους εἰς ὁμοειδεῖς ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἔχομεν 123456900 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 2735894. Καὶ ἐπειδὴ ζητοῦμεν νὰ ἐκφρασθῇ τὸ πηλίκον εἰς χιλιοστημόρια τρέπομεν διὰ τοῦτο τὸν διαιρετέον εἰς χιλιοστημόρια προσθέτοντες εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τρία μηδενικά. Οὕτως ἔχομεν 123456900000 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 2735894. Καὶ ἐκτελοῦντες τὴν πρᾶξιν κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν μέθοδον, λαμβάνομεν 45124 χιλιοστημόρια, ἤτοι 45,124 ἢ μᾶλλον 45,125 ὡς ἔγγιστα 0,001.

Ἰδοὺ ἡ πρᾶξις.

1234569 | 00000		2735894
140212		45124(9
3418		
683		
136		
27		
3		

Ἔστω καὶ δεύτερον παράδειγμα· νὰ εὕρωμεν ὡς ἔγγιστα 0,0001 τὸ πηλίκον τοῦ 229,4703568 διαιρουμένου διὰ τοῦ 7,3594.

22947035(680		73594
86883		311805(8
132895		
59301		
426		
59		
1		

ἔπρεπε κατὰ τὸν κανόνα νὰ συμπληρώσωμεν κατὰ πρῶτον τὰς δεκαδικὰς τάξεις τοῦ διαιρέτου διὰ τριῶν μηδενικῶν καὶ μετὰ ταῦτα νὰ γράψωμεν τέσσαρα ἄλλα μηδενικὰ εἰς τὸν διαιρετέον, καὶ οὕτω νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν πρᾶξιν· ἀλλὰ οἱ τρεῖς μηδενικοὶ χαρακτῆρες τοῦ διαιρέτου ὑπαμείβονται ὑπὸ τῶν τριῶν τελευταίων μηδενικῶν τοῦ διαιρετέου, καὶ οὕτως ἡ πρᾶξις ἄγεται εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ 22947035680 διὰ τοῦ 73594· ὅθεν εὑρίσκομεν πηλίκον 31,1805 ἢ 31,1806 ὡς ἔγγιστα 0,0001.

§. δ'. Περὶ τοῦ Ἑλληνικοῦ συστήματος τῶν μέτρων καὶ σταθμῶν.

161. Παραβάλλοντες τὸν ὑπολογισμὸν τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν πρὸς τὸν τῶν δεκαδικῶν ἐννοοῦμεν ἀμέσως πόσον διευκολύνει τὰς πράξεις ἡ δεκαδικὴ διαίρεσις τῶν ἀρχικῶν μονάδων. Διὰ τοῦτο καὶ ἡ Ἑλληνικὴ Κυβέρνησις διὰ τοῦ ἀπὸ 28 Σεπτεμβρίου 1836 Βασιλικοῦ διατάγματος ἀντικατέστησε τὸ Ὀθωμανικὸν σύστημα διὰ τοῦ ἑξῆς δεκαδικοῦ, τοῦ ὁποίου βαθμηδὸν εἰσάγεται ἡ χρῆσις.

Τὰ νέα ταῦτα μέτρα καὶ σταθμά, ἐκτὸς τινων ἐξαιρέσεων, εἶναι αὐτὰ τὰ τοῦ Γαλλικοῦ, τοῦ λεγομένου μετρικοῦ τῶν 1801, τὸ ὁποῖον οἱ σοφοὶ τῆς Γαλλίας διὰ τῆς ἐπιμόνου προσπαθείας κατώρθωσαν μετὰ δεκαετίαν περίπου νὰ φέρωσιν εἰς πέρας ὑπερνικήσαντες καὶ τὰς μεγάλας ἐπιστημονικὰς δυσκολίας καὶ τὰς ἀντενεργείας τῆς ἀμαθείας καὶ τῶν προλήψεων.

Μέτρα Μήκους.

Πῆχυς ἴσος μὲ τὸ γαλλικὸν μέτρον(1) (mètre).

Παλάμη τὸ 0,1 τοῦ πήχεως, τὸ ὑποδεκάμετρον (décimetre).

Δάκτυλος τὸ 0,1 τῆς παλάμης, ἢ τὸ 0,01 τοῦ πήχεως, τὸ ὑφεκατόμετρον (centimètre).

Γραμμὴ τὸ 0,1 τοῦ δακτύλου, ἢ τὸ 0,01 τῆς παλάμης, ἢ τὸ 0,001 τοῦ πήχεως· τὸ ὑποχιλιόμετρον (millimètre).

Μέτρα Πορείας.

Στάδιον ἴσον μὲ 1000 πήχεις· χιλιόμετρον (Kiliomètre). Σχοινὶς ἴση μὲ 10 στάδια, ἤτοι 10000 πήχεις· τὸ μυριάμετρον (Myriamètre).

---

(1) Τὸ Γαλλικὸν μέτρον, ἐξ οὗ καὶ ὅλον τὸ σύστημα ὠνομάσθη μετρικόν, εἶναι τὸ 0,0000001 τοῦ ἀποστήματος τοῦ Ἰσημερινοῦ ἀπὸ τοῦ πόλου, μετρηθέντος ἐπὶ τοῦ μεσημβρινοῦ τῶν Παρισίων. Οὕτω δέ, καθὼς τὰ ἀρχαῖα ἔθνη διετήρουν τὰ μέτρα αὐτῶν εἰς τοὺς ναούς, οἱ Γάλλοι ἀνέθεσαν αὐτὰ εἰς τὰς διαστάσεις τῆς γῆς ὡς εἰς ἀσφαλεστάτην καὶ ἀναλλοίωτον παρακαταθήκην.

Μέτρα ἐπιφανείας.

Τετραγωνικὸς πῆχυς. Στρέμμα ἴσον μὲ 1000 τετραγωνικοὺς πήχεις ἢ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 31 πήχεις Βασιλικοὶ καὶ 622 γραμμαὶ, ἤτοι 31, 622.

Μέτρα στερεῶν καὶ ῥευστῶν, εἴτ' οὖν χωρητικότητος.

Λίτρα, ἡ κυβικὴ παλάμη, ἢ τὸ 0,001 τοῦ κυβικοῦ πήχεως, τὸ γαλλικὸν κυβικὸν ὑποδεκάμετρον (**décimètre cube**)

Κοτύλη, τὸ 0, 1 τῆς λίτρας.

Μύστρον, τὸ 0, 1 τῆς κοτύλης, ἢ τὸ 0, 01 τῆς λίτρας.

Κύβος, τὸ 0, 1 τοῦ μύστρου, ἢ τὸ 0, 01 τῆς κοτύλης, ἢ τὸ 0, 001 τῆς λίτρας.

Ἰδίως διὰ τοὺς δημητριακοὺς καρπούς.

Κοιλὸν ἴσον μὲ 100 λίτρας, ἤτοι τὸ 0, 1 τοῦ κυβικοῦ πήχεως.

Σταθμά.

1) Διὰ τὰ πολύτιμα εἴδη.

Δραχμὴ ἴση μὲ τὸ εἰδικὸν βάρος καθαροῦ ὕδατος ἑνὸς κύβου, ἤτοι 0, 001 λίτρας, τὸ γαλλικὸν γράμμον (**gramme**).

Ὀβολὸς τὸ 0, 1 τῆς δραχμῆς, ἢ τὸ ὑποδεκάδραχμον (**décigramme**).

Κόκκος τὸ 0, 1 τοῦ ὀβολοῦ ἢ τὸ 0, 01 τῆς δραχμῆς, τὸ ὑφεκατόδραχμον (**centigramme**).

2) Διὰ τὰ κοινὰ εἴδη.

Μνᾶ ἴση μὲ 1500 δραχμάς. Ἐνταῦθα δὲν διετηρήθη ἡ δεκαδικὴ σχέσις.

3) Διὰ τὰς μεγάλας ποσότητας.

Τάλαντον ἴσον μὲ 100 μνᾶς.

Τόνος ἴσος μὲ 10 τάλαντα, εἴτ' οὖν 1000 μνᾶς.

Ὅλαι αἱ μονάδες τοῦ συστήματος τούτου λέγονται Βασιλικαί.

162. Ὁ λόγος τῶν πρωτίστων τούτων μέτρων καὶ σταθμῶν πρὸς τὰ τῆς Κωνσταντινουπόλεως, τὰ ὁποῖα ἦσαν ἐν χρήσει καὶ εἰς τὴν Ἑλλάδα, καὶ τὸ ἀνάπαλιν ὁ τῶν παλαιῶν πρὸς τὰ νέα, κατὰ τὸ προμνησθὲν διάταγμα, προσδιωρίσθη ὡς ἑξῆς.

Ὁ πῆχυς ἰσοῦται μὲ 1, 5432 τοῦ μικροῦ πήχεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως.

Ὁ αὐτὸς ἰσοῦται μὲ 1, 495 τοῦ μεγάλου.

Ἡ μνᾶ ἰσοῦται μὲ 1, 1719 τῆς ὀκάδος, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦσι 468 $\frac{3}{4}$ δράμια ἢ 1 ὀκὰν καὶ 68 $\frac{3}{4}$ δράμια.

Ἡ λίτρα ἰσοῦται μὲ 0,03015 τοῦ παλαιοῦ κοιλοῦ, ἑπομένως τὸ Βασιλικὸν κοιλὸν ἰσοῦται μὲ 3,015 τοῦ παλαιοῦ.

Ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς ἰσοῦται μὲ 2, 381 τετραγωνικοὺς μικροὺς πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως· ἑπομένως τὸ Βασιλικὸν στρέμμα περιέχει 2381 τοιούτους τετραγωνικοὺς πήχεις· εἶναι δὲ 0,787 τοῦ παλαιοῦ πελοποννησιακοῦ στρέμματος, συνισταμένου ἐκ 3025 τετραγωνικῶν μικρῶν πήχεων τῆς Κωνσταντινουπόλεως.

Τὸ ἀνάπαλιν. — Ὁ μὲν μικρὸς πῆχυς τῆς Κωνσταντινουπόλεως (ἐνδεζὲ) ἰσοῦται μὲ 0, 648 τοῦ Βασιλικοῦ πήχεως.

Ὁ δὲ μέγας (ἀρσὶν) ἰσοῦται μὲ 0, 669 τοῦ Βασιλικοῦ πήχεως.

Ἡ ὀκὰ ἰσοῦται μὲ 0,8533 τῆς μνᾶς.

Τὸ κοιλὸν ἰσοῦται μὲ 33 λίτρας καὶ 166 χιλιοστημόρια, ἤτοι 33,166.

Ὁ τετραγωνικὸς μικρὸς πῆχυς τῆς Κωνσταντινουπόλεως ἰσοῦται μὲ 0, 419 τοῦ Βασιλικοῦ πήχεως· ἑπομένως τὸ παλαιὸν πελοποννησιακὸν στρέμμα, ὃν τετράγωνον πλευρᾶς 55 μικρῶν πήχεων, ἤτοι περιέχον 3025 τετραγωνικοὺς μικροὺς πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως, ἰσοῦται μὲ 1, 17 τοῦ Βασιλικοῦ στρέμματος.

163. Κατὰ τὰς ἐκτεθείσας ταύτας σχέσεις δυνάμεθα ῥαδίως νὰ τρέψωμεν ἀριθμόν τινα παλαιῶν μονάδων εἰς ἰσοδύναμον τοῦ νέου τούτου συστήματος καὶ τὸ ἀνάπαλιν. Ἐπειδὴ ἀρκεῖ ἁπλῶς νὰ πολυπλασιάσωμεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ὡς ἀνωτέρω λόγον τῆς μονάδος αὐτοῦ πρὸς τὴν τοῦ ζητουμένου ἰσοδυνάμου. Φέρομεν διὰ τοῦτο ἓν παράδειγμα δι' ἕκαστον εἶδος.

Α΄. Νὰ τρέψωμεν 43 πήχεις καὶ 75 δακτύλους εἰς μικροὺς πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως.

Ἀνάλυσις. — Ἐπειδὴ ὁ Βασιλικὸς πῆχυς ἰσοῦται μὲ 1,5432 τοῦ μικροῦ πήχεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως· διὰ τοῦτο ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἦναι τὸ γινόμενον τοῦ 1,5432 ἐπὶ 43,75, τουτέστιν 67,515. Καὶ ἐπειδὴ ὁ πῆχυς τῆς Κωνσταντινουπόλεως διαιρεῖται εἰς ἥμισυ, τέταρτα κτλ. διὰ τοῦτο τρέπομεν ἀμέσως τὸ δεκαδικὸν κλάσμα 0,515 τοῦ πήχεως εἰς προσεγγίζουσαν τοιαύτην ἔκφρασιν. Πολυπλασιάζοντες δὲ ἐπὶ 16 εὑρίσκομεν ἀμέσως εἰς τὸ γινόμενον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τὸ

```
    1,5432
     43,75
----------
     77160
   108024
    46296
   61728
----------
 67,515000
        16
----------
      3090
      515
----------
     8(240
```

ἀκέραιον μέρος 8, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰ δέκατα ἕκτα· ὅθεν παραβλέποντες τὸ δεκαδικὸν κλάσμα 0, 240 τοῦ δεκάτου ἕκτου τοῦ πήχεως εὑρίσκομεν 67 $\frac{8}{16}$ πήχεις, ἢ μᾶλλον 67 $\frac{1}{2}$ διὰ τὴν ζητουμένην λύσιν.

Β΄. Ἔστω ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 43, 75 νὰ ἐκτιμηθῇ εἰς μεγάλους πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως.

Πολυπλασιάζομεν ὁμοίως τὸν λόγον 1, 495 ἐπὶ τὸν δεδομένον ἀριθμὸν 43, 75 καὶ εὑρίσκομεν ἀκεραίους πήχεις 65 καὶ δεκαδικὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον τρέπομεν ὡσαύτως εἰς τριακοστὰ δεύτερα, πολυπλασιάζοντες ἐπὶ 16. Οὕτως εὑρίσκομεν ἀκριβῆ τὸν προσδιορισμὸν 65 $\frac{13}{32}$ μεγάλους πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως.

1,495
43,75
7475
10465
4485
5980
65,40625
32
81250
121875
1300000

Γ΄. Νὰ τρέψωμεν 65 μνᾶς εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν ὀκάδων.

Πολυπλασιάζομεν τὸν λόγον 468 $\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸν δεδομένον ἀριθμὸν καὶ εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον 30468 δράμια. Διαιροῦντες μετὰ ταῦτα διὰ τοῦ 400 τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὀκάδας οὕτως 76 ὀκάδας καὶ 68 δράμια $\frac{3}{4}$ εἶναι ἡ ζητουμένη λύσις.

468 $\frac{3}{4}$
65
2340
2808
48 $\frac{3}{4}$
30468 | 400
2468 76
68 $\frac{3}{4}$

Δ΄. Νὰ τρέψωμεν εἰς κοιλὰ καὶ εἰκοστὰ τοῦ κοιλοῦ τὰς Βασιλικὰς λίτρ. 213, 815, ἤτοι τὰ 2 Βασιλ. κοιλά, 13 λίτρ. καὶ 815 κύβους.

Πολυπλασιάζοντες ὡσαύτως τὸν δεδομένον ἀριθμὸν τῶν λιτρῶν ἐπὶ τὸν λόγον εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον 6 κοιλὰ καὶ δεκαδικὸν κλάσμα τοῦ κοιλοῦ. Πολυπλασιάζομεν τὸ κλάσμα τοῦτο ἐπὶ 20 καὶ οὕτω τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰν χωριζόμενον ἀκέραιον 8 ἐκφράζει τὰ εἰκοστά. Ἐκλαμβάνοντες δὲ τὸ λοιπὸν δεκαδικὸν ἀντὶ $\frac{1}{20}$ εὑρίσκομεν ὡς ἔγγιστα προσδιορισμὸν 6 κοιλὰ 9 εἰκοστά.

213,815
0,03015
1069075
213815
641445
6,44652225
20
8,93044500

Έ. Νὰ τρέψωμεν εἰς παλαιὰ πελοποννησιακὰ στρέμματα τὰ 63 βασιλικὰ καὶ 813 πήχεις.

Εὑρίσκομεν ὡσαύτως διὰ τοῦ πολυπλασιασμοῦ 50,22 ὡς ἔγγιστα 0,001· δυνάμεθα δὲ νὰ τρέψωμεν τὸ δεκαδικὸν 0,22 εἰς ἰσοδύναμον κοινόν, οἷον ἡμίση, τέταρτα κτλ. ἢ εἰς πήχεις, πολυπλασιάζοντες, ὡς ἀνωτέρω, ἐπὶ 2, 4, κτλ. ἢ ἐπὶ τοὺς 3025 τετραγωνικοὺς πήχεις τοῦ στρέμματος.

```
   63,813
    0,787
---------
   446691
  510504
 446691
---------
50,220831
```

164. Τῶν αὐτῶν ζητημάτων φέρομεν ἤδη τὴν ἀντίστροφον πρότασιν, τουτέστι λαμβάνομεν τὰ εὑρεθέντα ἐξαγόμενα νὰ τρέψωμεν εἰς ἰσοδυνάμους ἀριθμοὺς τοῦ Βασιλικοῦ συστήματος, καὶ πρὸς συμπλήρωσιν τῶν ὑποδειγμάτων καὶ πρὸς ἐπικύρωσιν τῶν ἀνωτέρω ὑπολογισμῶν.

ϛ΄. Νὰ εὕρωμεν μὲ πόσους βασιλικοὺς πήχεις ἰσοδυναμοῦσιν οἱ 67 $\frac{1}{2}$ μικροὶ πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως.

Πολυπλασιάζοντες τὸν λόγον 0,648 ἐπὶ τὸν δεδομένον ἀριθμὸν 67 $\frac{1}{2}$, εὑρίσκομεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον 74 παλάμας, ἀντὶ τῶν 75, τὰς ὁποίας εἴχομεν εἰς τὸ πρῶτον ζήτημα. Ἀλλ' ἡ μικρὰ αὕτη διαφορὰ προκύπτει ἐκ τῆς ὡς ἔγγιστα τότε ἐκτιμήσεως τοῦ δεκαδικοῦ εἰς μόνον $\frac{8}{16}$, ἤτοι $\frac{1}{2}$.

```
  0,648
   67 1/2
---------
   4536
  3888
   324
---------
 43,740
```

Ζ΄. Νὰ τρέψωμεν 65 $\frac{13}{32}$ μεγάλους πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως εἰς βασιλικούς.

Πολυπλασιάζοντες ὡσαύτως τὸν λόγον 0,669 ἐπὶ 65 $\frac{13}{32}$ εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον 43,756 τουτέστιν 6 χιλιοστημόρια περισσότερον, τὰ ὁποῖα δὲν εἴχομεν εἰς τὸ β΄. ζήτημα· τοῦτο δὲ προέρχεται ἐκ τῆς ὡς ἔγγιστα ἐκτιμήσεως τοῦ λόγου, ἐκληφθέντος εἰς 0,669 ἀντὶ μικροτέρου τινὸς ἀριθμοῦ κατ' ἀσήμαντον διαφοράν.

```
  0,669
   65 13/32
---------
   3345
  4014
    271
---------
 43,756
```

Ή. Νὰ τρέψωμεν 76 ὀκάδ. 68 $\frac{3}{4}$ δράμια εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν μνῶν.

```
              0,8533
                76   68 3/4
            -------------
               51198
              59731
ἐπὶ 50 δρ.     4066
    10          213
     5          106
     2           42
     1           21
    3/4          15
            -------------
             64,9971
```

Πολυπλασιάζομεν τὸν λόγον πρῶτον ἐπὶ 76 ὀκάδ. καὶ μετὰ ταῦτα ἐπὶ 68 $\frac{3}{4}$ δράμια, κατὰ τὴν μέθοδον τῶν συμμέτρων μερῶν, προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα, καὶ εὑρίσκομεν 64,99 ὡς ἔγγιστα 0,001 τῆς μνᾶς, τουτέστιν 65 μνᾶς, ὡς εἴχομεν εἰς τὸ τρίτον ζήτημα.

Θ΄. Νὰ τρέψωμεν 6 κοιλὰ καὶ 9 εἰκοστὰ εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν κοιλῶν καὶ λιτρῶν τοῦ βασιλικοῦ συστήματος.

	33,166
	6 κοιλ. 9 εἰκοστ.
	198996
ἐπὶ $\frac{5}{20}$ τὸ $\frac{1}{4}$	8291
$\frac{4}{20}$ τὸ $\frac{1}{5}$	6633
	213,920

Πολυπλασιάζοντες ὡσαύτως τὸν λόγον 33,166 ἐπὶ τὸν δεδομένον ἀριθμόν, κατὰ τὴν μέθοδον τῶν συμμέτρων μερῶν, προσδιορίζομεν 213,920, ἤτοι 2 κοιλὰ 13 λίτρας καὶ 920 χιλιοστημόρια τῆς λίτρας· διαφέρει δὲ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἀπὸ τὸν ῥηθέντα ἀριθμὸν 213,815 τοῦ δ΄. ζητήματος· διότι ἐξελάβομεν τὰ 8,93 εἰκοστὰ τοῦ κοιλοῦ ἀντὶ 9 εἰκοστῶν.

Ι΄. Νὰ τρέψωμεν παλαιὰ στρέμματα 50,22 εἰς βασιλικά.

Εὑρίσκομεν ὡσαύτως διὰ τοῦ πολυπλασιασμοῦ	50,22
63,779 ἀντὶ τῶν 63,813· ἡ δὲ διαφορὰ αὕτη	1,27
προκύπτει καὶ ἐκ τῶν παραλειφθέντων δεκαδικῶν	35154
χαρακτήρων τοῦ ἐξαγομένου τοῦ έ. ζητήματος καὶ	10044
ἐκ τῆς ὡς ἔγγιστα ἐκτιμήσεως τοῦ λόγου τοῦ	5022
παλαιοῦ στρέμματος πρὸς τὸ βασιλικὸν εἰς 1,27.	63,7794

165. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τρέπομεν ἐν γένει ἀριθμὸν ἑνός τινος συστήματος πρὸς ἄλλον ἰσοδύναμον, ἀναφερόμενον εἰς ἕτερον σύστημα, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν λόγον τῶν ἀρχικῶν μονάδων, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν εἰς ἐπὶ τούτῳ ἐσχηματισμένους μετρολογικοὺς πίνακας. Ἐπειδὴ δὲ ἡ χρῆσις τῶν ζητημάτων τούτων ἀπαντᾶται συχνοτάτη, σχηματίζονται πίνακες ἀναγωγικοί, ἀπὸ τῆς 1 ἕως τῶν 9 μονάδων δι᾽ ἕκαστον εἶδος, καὶ δι᾽ αὐτῶν βοηθούμεθα εἰς τὴν εὐχερεστάτην διεξαγωγὴν τοῦ ὑπολογισμοῦ.

Τέλος προβάλλομεν χάριν ἀσκήσεως καὶ τὰ ἑξῆς ζητήματα.

ά. Ἠγόρασέ τις τεμάχιον ῥούχου 40 βασιλικῶν πήχεων καὶ 75 ἑκατοστῶν πρὸς 26 φράγκα τὸν πῆχυν. Πρὸς πόσας δραχμὰς ἀναλογεῖ τὸν μικρὸν πῆχυν τῆς Κωνσταντινουπόλεως, τιμωμένου τοῦ φράγκου πρὸς δραχ. 1,11; (1)

β΄. Εἴκοσι παλαιὰ στρέματα γῆς ἐτιμήθησαν δραχ. 512, καὶ λεπτὰ 50 τὸ στρέμμα, πόσον ἀναλογεῖ τὸ βασιλικὸν στρέμμα;

γ΄. Εἰς 25 παλαιὰ στρέμματα ἐσπάρησαν 213 ὀκάδες σίτου, πόσαι μναῖ ἀναλογοῦσιν εἰς τὸ βασιλικὸν στρέμμα;

δ΄. Τὸ θερμόμετρον τοῦ Ῥωμύρου διαιρεῖται εἰς 80 βαθμούς, τὸ δὲ τοῦ ἑκατομβάθμου εἰς 100, ὥστε ὁ λόγος τοῦ βαθμοῦ τοῦ ἑκατομβάθμου εἶναι πρὸς τὸν τοῦ Ῥωμύρου, ὡς 1 πρὸς 0,8. Ζητεῖται οἱ 23 $\frac{1}{2}$ βαθμοὶ τοῦ ἑκατομβάθμου εἰς πόσους ἀναφέρονται τοῦ Ῥωμύρου;

έ. Ἡ παλαιὰ διαίρεσις τῆς περιφερείας, ἥτις εἶναι καὶ ἡ ἐπικρατεστέρα, εἶναι εἰς 360 μοίρας, καὶ ἡ μοῖρα εἰς 60 λεπτά, καὶ τὸ λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα. Ἡ δὲ νέα εἶναι εἰς 400 μοίρας, ἡ δὲ μοίρα εἰς 100 λεπτὰ καὶ τὸ λεπτὸν εἰς 100 δεύτερα. Τίς εἶναι ὁ λόγος τῆς παλαιᾶς πρὸς τὴν νέαν μοῖραν καὶ τὸ ἀνάπαλιν;

ς΄. Νὰ τρέψωμεν 23 μοίρας 13 λεπτὰ καὶ 42 δεύτερα τῆς πρώτης διαιρέσεως εἰς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν μοιρῶν τῆς δευτέρας, ἢ τὰς αὐτὰς μοίρας κατὰ τὴν νέαν διαίρεσιν εἰς μοίρας παλαιάς;

ζ΄. Ἂν εἰς μίαν ὀκὰν ἐλαίου ἀναλύονται $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκάδος χρώματος, εἰς μίαν μνᾶν πόσαι δραχμαὶ ἀναλύονται ἀναλόγως;

ή. Ἀπὸ 25,85 βασιλ. πήχεων ὑφάσματος ἐκόπησαν ά. 12 $\frac{3}{4}$ καὶ 6΄. 7 $\frac{3}{8}$ πήχεις μικροὶ Κωνσταντινουπόλεως. Πόσοι βασιλ πήχεις ἔμειναν ἀπὸ τὸ ὅλον μῆκος;

θ΄. Πόσον φέρουσι τὰ 23,75 βασιλ. στρέμματα πρὸς δραχ. 36,65 τὸ πελοποννησιακὸν στρέμμα;

ί. Ἂν ἡ ὀκὰ μετάξης τιμᾶται δραχ. 36,75, πόσον ἀναλόγως πρέπει νὰ τιμηθῇ ἡ μνᾶ;

(1) Σημ. Εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο καὶ τὸ ἐφεξῆς προτείνονται καὶ διδόμενα μὴ ἔχοντα τινὰ ἐπιῤῥοὴν εἰς τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον· ἐγένετο δὲ ἐπίτηδες τοῦτο πρὸς ὁδηγίαν τοῦ μαθητοῦ, ὅπως δίδῃ τὴν ἀνήκουσαν προσοχὴν εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ζητήματος.

ΜΕΡΟΣ Β΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν.

§. α΄. Περὶ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων.

166. ΔΙΑ τὴν ἀνακάλυψιν νέων ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν, τὰς ὁποίας θέλομεν μεταχειρισθῇ εἰς τὸν περαιτέρω ὑπολογισμὸν αὐτῶν, εἶναι ἀναπόφευκτον νὰ δανεισθῶμεν ἀπὸ τὴν Ἄλγεβραν τὰ σύμβολα αὐτῆς, διὰ τῶν ὁποίων παριστάνομεν γενικῶς καὶ συντόμως ὅλους τοὺς συλλογισμοὺς καὶ τὰς πράξεις ὅσας ἀπαιτεῖ ἡ λύσις τοῦ ζητήματος. Τὰ σύμβολα ταῦτα εἶναι δέκα.

α΄. Τὰ γράμματα λαμβανόμενα ἀντὶ ἀριθμῶν οἱωνδήποτε. Ἡ χρῆσις αὐτῶν, προσφέρουσα συντομωτέραν καὶ γενικωτέραν τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν, συντελεῖ μεγάλως εἰς τὴν ἀπόδειξιν ἰδιότητός τινος, ἀφορώσης μίαν ἢ περισσοτέρας κλάσεις ἀριθμῶν.

β΄. Τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως $+$, τὸ ὁποῖον καλεῖται πλέον. Οὕτω $45+23$ ἐκφέρεται 45 πλέον 23, καὶ σημαίνει τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀριθμῶν 45 καὶ 23. Καὶ ὁμοίως $α+β+γ$ σημαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν α, β, καὶ γ, κτλ.

γ΄. Τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως $-$, καλούμενον μεῖον, τιθέμενον πρὸ τοῦ ἀφαιρετέου. Οὕτως $73-49$ ἐκφέρεται 73 μεῖον 49 καὶ σημαίνει τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν 73 καὶ 49. Ὁμοίως $α-β$ ἐκφράζει τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν οἱωνδήποτε κτλ.

δ΄. Τὸ σημεῖον τοῦ πολυπλασιασμοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι $\times$, ἢ μία στιγμὴ, καλούμενον ἐπὶ, καὶ τίθεται μεταξὺ τῶν παραγόντων, οἷον 43×25 ἢ $43\,.\,25$ καὶ ἐν γένει $α\times β$ ἢ $α\,.\,β$ ἐκφέρεται 43 ἐπὶ 25, ἢ α ἐπὶ β καὶ σημαίνει τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων 43 καὶ 25, ἢ α καὶ β.

Ὅταν οἱ παράγοντες τοῦ πολυπλασιασμοῦ παριστάνωνται γενικῶς διὰ γραμμάτων, τότε καὶ παραλείπεται ὅλως τὸ σημεῖον· κατὰ συνθήκην δὲ ἐννοεῖται οὕτως ἡ παράστασις τοῦ πολυπλασιασμοῦ, οἷον $αβ$ σημαίνει ὅ,τι καὶ $α\times β$ ἢ $α.\,β$. Ἡ συνθήκη αὕτη δὲν ἔχει χώραν καὶ εἰς τοὺς ἀριθμητικοὺς χαρακτῆρας· διότι συγχέεται τότε ἡ παράστασις τοῦ πολυπλασιασμοῦ μὲ τοὺς κανόνας τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν, π. χ. 5×6 σημαίνει τὸ γινόμενον 30, ἄνευ δὲ τοῦ σημείου συμπίπτει μὲ τὸν ἀριθμὸν 56.

ε΄. Τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως, τὸ ὁποῖον εἶναι ἢ δύο στιγμαὶ, τιθέμεναι μεταξὺ διαιρετέου καὶ διαιρέτου, ἢ μία κεραία —, ἄνω τῆς ὁποίας γράφεται ὁ διαιρετέος, κάτωθι δὲ ὁ διαιρέτης καὶ λέγεται διά.

Οὕτως $24 : 6$ ἢ $\frac{24}{6}$ ἐκφέρεται 24 διὰ 6 καὶ σημειόνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 24 διὰ τοῦ 6.

Ὁμοίως $α : β$ ἢ $\frac{α}{β}$ σημαίνει α διὰ β.

ς΄. Ὁ συντελεστὴς, ὅστις εἶναι ἀριθμητικὸς χαρακτὴρ, τιθέμενος πρὸς τὰ ἀριστερά τινος γραμματικῆς ποσότητος, πρὸς σύντομον παράστασιν τῆς διαδοχικῆς προσθέσεως τῆς ὑπὸ τοῦ γράμματος παριστανομένης ποσότητος. Οὕτως, ἀντὶ τοῦ $α+α+α+α+α$, γράφομεν ἁπλῶς $5α$ καὶ σημαίνομεν ὡσαύτως τὴν πρόσθεσιν τῶν 5 ἴσων προσθετέων. Ὁμοίως $12αβ$ σημαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν 12 γινομένων ἴσων μὲ $αβ$, κτλ.

ζ΄. Ὁ ἐκθέτης, ὅστις εἶναι ἀριθμητικὸς χαρακτὴρ τιθέμενος ἐπί τινος ποσότητος καὶ ἐμφαίνων συντόμως τὸν διαδοχικὸν πολυπλασιασμὸν τῆς ποσότητος ταύτης· οἷον ἀντὶ τοῦ $α\timesα\timesα\timesα$, ἢ α α α α, γράφομεν συντομώτερον $α^4$, λέγοντες α τέσσαρα ἢ μᾶλλον α τετάρτη δύναμις.

Ἐν γένει ὀνομάζομεν δύναμιν τινὸς ἀριθμοῦ τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολυπλασιασμοῦ πολλῶν ἴσων παραγόντων, βαθμὸν δὲ τῆς δυνάμεως τὸν ἀριθμὸν τῶν ἴσων παραγόντων. Οὕτω δευτέρα, τρίτη, τετάρτη, κτλ. δύναμις τοῦ α εἶναι τὰ ἐξαγόμενα $α^2$, $α^3$, $α^4$. κτλ.

Αἱ δυνάμεις δευτέρα καὶ τρίτη κατὰ γεωμετρικὴν σημασίαν μεταβιβασθεῖσαν καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν, λέγονται πρὸς τούτοις ἡ μὲν τετράγωνον, ἡ δὲ κύβος.

Πᾶσα δύναμις ἀναφέρεται ὡς εἰς βάσιν πρός τινα ἀριθμὸν, ὅστις πολυπλασιαζόμενος ἐφ' ἑαυτὸν ἅπαξ ἢ πολλάκις, παράγει τὸ τοιοῦτον ἐξαγόμενον· ἡ πολυπλασιαζομένη αὕτη ποσότης λέγεται ῥίζα τῆς δυνάμεως. Οὕτως εἶναι καὶ αἱ ῥίζαι διαφόρων βαθμῶν, οἷον ἡ δευτέρα, ἤτοι τετραγωνικὴ, ἡ τρίτη, ἤτοι κυβικὴ, ὁμοίως ἡ τετάρτη, ἡ πέμπτη κτλ.

η΄. Τὸ ῥιζικὸν σημεῖον $\sqrt{\ }$, τὸ ὁποῖον μεταχειριζόμεθα, ἵνα σημάνωμεν τὴν ἐξακτέαν ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος, οἷον $\sqrt[3]{α}$ ἐκφέρεται κυβικὴ ἢ τρίτη ῥίζα τοῦ α καὶ ὁμοίως $\sqrt[4]{β}$ ἐκφέρεται τετάρτη ῥίζα τοῦ β, κτλ.

Ὁ ἀριθμὸς 3, 4 κτλ., ὅστις χαρακτηρίζει τὸν βαθμὸν τῆς ῥίζης, λέγεται δείκτης. Μόνον δὲ εἰς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παραλείπεται ὁ δείκτης 2 ἐννοούμενος κατὰ συνθήκην· οἷον $\sqrt{\alpha}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ α.

θ'. Τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος $=$, τιθέμενον μεταξὺ τῶν ἐξισουμένων ποσοτήτων, καλεῖται δὲ ἴσον· οἷον $\alpha=\beta+\gamma$ ἐκφέρεται α ἴσον μὲ β πλέον γ· καὶ παριστᾷ συντόμως τὸ ἄθροισμα α τῶν δύο ποσοτήτων β καὶ γ.

Ὁμοίως $35-23=12$ παριστάνει τὴν διαφορὰν 12 τῶν ἀριθμῶν 35 καὶ 23 κτλ.

Αἱ παραστάσεις αὗται, ὡς $\alpha=\beta+\gamma$, ἢ $43-12=31$ κτλ. λέγονται ἰσότητες καὶ ἡ μὲν πρὸς ἀριστερὰν τοῦ σημείου πρῶτον μέλος, ἡ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ δεύτερον.

ι. Τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος γραφόμενον διττῶς $>$ ἢ $<$ ὀνομαζόμενον μεῖζον ἢ ἔλασσον· καὶ εἰς μὲν τὸ χάσμα τῆς γωνίας γράφομεν τὴν μείζονα, εἰς δὲ τὴν κορυφὴν τὴν ἐλάσσονα ποσότητα, οἷον $5>3$, ἢ $3<5$ ἐκφέρεται 5 μεῖζον τοῦ, 3, ἢ 3 ἔλασσον τοῦ 5.

167. Ἰδοὺ τινὲς ἐφαρμογαὶ τῶν συμβόλων τούτων ἐξηγοῦσαι ὁπωσοῦν τὴν ὠφέλειαν τῆς χρήσεως αὐτῶν. Π. χ. Ἵνα παραστήσωμεν, ὅτι ποσότης τις α μέλλει νὰ ὑψωθῇ εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν, τὸ δὲ ἐξαγόμενον νὰ πολυπλασιασθῇ τρὶς ἐπὶ τὴν ποσότητα β καὶ δὶς ἐπὶ τὴν γ, γράφομεν ἁπλῶς $\alpha^4\,\beta^3\,\gamma^2$.

Θέλοντες δὲ νὰ σημειώσωμεν τὸ ἄθροισμα 7 ἴσων ἀριθμῶν μὲ τὸ προσημειωθὲν ἐξαγόμενον, ἤτοι τὸν πολυπλασιασμὸν τοῦ $\alpha^4\,\beta^3\,\gamma^2$ ἐπὶ 7, γράφομεν ἁπλῶς $7\,\alpha^4\,\beta^3\,\gamma^2$.

Ὡσαύτως $6\,\alpha^5\,\beta^2$ ἐκφράζει τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ γινομένου τῆς πέμπτης δυνάμεως τοῦ α ἐπὶ τὴν δευτέραν τοῦ β.

Καὶ $3\alpha-5\beta$ ἐκφράζει τὴν διαφορὰν τοῦ τριπλασίου τοῦ α καὶ τοῦ πενταπλασίου τοῦ β.

Καὶ ὁμοίως $2\alpha^2-3\alpha\,\beta+4\beta^2$ εἶναι ἡ συμβολικὴ παράστασις τοῦ διπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ α, ἐλαττουμένου κατὰ τὸ τριπλοῦν τοῦ γινομένου τοῦ α ἐπὶ β καὶ αὐξανομένου κατὰ τὸ τετραπλοῦν τοῦ τετραγώνου τοῦ β.

168. Καλεῖται μονώνυμον ἡ ποσότης, τῆς ὁποίας τὰ μέρη δὲν διακρίνονται διὰ τοῦ σημείου $+$ ἢ $-$, οἷον 3α, $5\alpha^2$ $7\alpha^3\,\beta^2$ εἶναι μονώνυμα.

Πολυώνυμον δὲ ἡ συγκροτουμένη ἐκ πολλῶν μονωνύμων· οἷον $3\alpha-2\beta$, $2\alpha^4-3\alpha\beta+4\beta$, ἐξ ὧν ἡ μὲν εἶναι δυώνυμον, ἡ δὲ τριώνυμον καὶ γενικώτερον πολυώνυμον.

Τὰ μονώνυμα ποσά, τὰ συγκροτοῦντα τὴν παράστασιν τοῦ πολυωνύμου λέγονται ὅροι· ὥστε ὅρος εἶναι αὐτὸ τὸ μονώνυμον, ὁσάκις συνδέεται μετ᾽ ἄλλων ποσοτήτων.

Αἱ ἀλγεβρικαὶ αὗται παραστάσεις, θεωρούμεναι ὡς ὡρισμέναι ποσότητες ὑποβάλλονται εἰς τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, ὡς καὶ οἱ ἀριθμοί· ἡ πλήρης αὐτῶν θεωρία συνιστᾷ τὸν συμβολικὸν ὑπολογισμόν, ὅστις εἶναι ἀντικείμενον τῆς Ἀλγέβρας. Ἐνταῦθα δὲ θέλομεν ἐκθέσει τὰ ἁπλούστερα, ὅσων τὴν χρῆσιν θέλομεν γνωρίσει εἰς τὰ ἑπόμενα μαθήματα τῆς παρούσης πραγματείας.

169. *Πρόσθεσις.*—Παριστάνομεν τὴν πρόσθεσιν δύο ἀριθμῶν α καὶ β γράφοντες ἁπλῶς $\alpha+\beta$. Ὡσαύτως $\alpha+\beta+\gamma$ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν α, β καὶ γ. Καὶ ὁμοίως $\alpha-\beta$ καὶ $\gamma+\delta-\varepsilon$ προστιθέμενα ὁμοῦ σχηματίζουσι $\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon$.

Ὁμοίως, ἵνα προσθέσωμεν $\alpha-\beta$ καὶ $\beta-\gamma$, γράφομεν κατὰ πρῶτον $\alpha-\beta+\beta-\gamma$. Παρατηροῦντες δὲ μετὰ ταῦτα, ὅτι ἡ ποσότης β, ἀφαιρουμένη μὲν τὸ πρῶτον, πρέπει μετὰ ταῦτα νὰ προστεθῇ, ὥστε διὰ τῶν ἀντιθέτων πράξεων ἐξαφανίζεται, δυνάμεθα διὰ τοῦτο νὰ ἀνάξωμεν τὸ ἀνωτέρω πολυώνυμον εἰς τὸ διώνυμον $\alpha-\gamma$. Ἡ ἁπλούστευσις αὕτη λέγεται εἰς τὴν Ἄλγεβραν ἀγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων.

170. *Ἀφαίρεσις.*—Ἵνα ἀφαιρέσωμεν μονώνυμον ἀπὸ μονώνυμον, οἷον β ἀπὸ τοῦ α, γράφομεν ἁπλῶς $\alpha-\beta$, καὶ ὡσαύτως, ἵνα σημειώσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ἑτέρας τινος ποσότητος γ, γράφομεν $\alpha-\beta-\gamma$· καὶ διὰ τούτου παριστάνομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ β καὶ γ, ἢ τοῦ ἀθροίσματος $\beta+\gamma$ ἀπὸ τοῦ α. Ὁμοίως $\alpha-\beta-\gamma-\delta$· εἶναι ἡ συμβολικὴ ἀφαίρεσις τοῦ $\beta+\gamma+\delta$ ἀπὸ τοῦ μειωτέου α, θεωρουμένου ὡς μονωνύμου, ἢ καὶ ὡς πολυωνύμου, μεταξὺ τῶν ὅρων τοῦ ὁποίου ὑπάρχουσι καί τινες ἔχοντες τὸ σημεῖον —.

Ἀλλ᾽ ὅταν πρόκηται νὰ ἀφαιρέσωμεν πολυώνυμον, οἷον $\gamma-\delta$ ἀπὸ τοῦ $\alpha-\beta$, σημειοῦμεν κατὰ πρῶτον τὴν ἀφαίρεσιν οὕτως $\alpha-\beta-(\gamma-\delta)$· παρατηροῦντες δὲ μετὰ ταῦτα, ὅτι ἡ ἀφαίρεσις τοῦ $\gamma-\delta$ ἀπὸ τοῦ $\alpha-\beta$, σημαίνει νὰ ἐλαττώσωμεν τὴν $\alpha-\beta$ οὐχὶ καθ᾽ ὁλόκληρον τὴν γ, ἀλλὰ κατὰ τὴν γ ἠλαττωμένην κατὰ δ, καὶ ὅτι ἂν ἀφαιρέσωμεν ὁλόκληρον τὴν γ, λαμβάνομεν ἀφαιρετέον μεγαλήτερον κατὰ δ μονάδας, καὶ ἑπομένως $\alpha-\beta-\gamma$ μικρότερον κατὰ τὰς αὐτὰς δ μονάδας, συμπεραίνομεν, ὅτι ὅπως διορθώσωμεν τὴν ἔλλειψιν ταύτην, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ ὑπόλοιπον καὶ τὰς μονάδας ταύτας, καὶ οὕτως $\alpha-\beta-\gamma+\delta$ ἐκφράζει τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον. Ἐκ τούτου ἐξάγεται ὁ γενικὸς κανών· Ἵνα ἀφαιρέσωμεν πολυώνυμον ἀπὸ πολυώνυμον, μεταβάλλομεν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ $+$ εἰς $-$ καὶ ἀπὸ $-$ εἰς $+$ καὶ γράφομεν αὐτοὺς κατ᾽ ἐξακολούθησιν τῶν ὅρων τοῦ μειωτέου.

Οὕτως εὑρίσκομεν $3α-(2β-3γ)=3α-2β+3γ$·

καὶ $5α-4β-(6δ-ζ+η)=5α-4β-6δ+ζ-η$.

171. *Πολυπλασιασμός*.—Ἔστω $α^4$ νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ $β^3$· γράφομεν $α^4 \times β^3$, ἢ ἁπλῶς $α^4\, β^3$.

Ἀλλ᾽ ἂν ἔχωμεν $α^5$ νὰ πολυπλασιάσωμεν ἐπὶ $α^3$· Ἐπειδὴ $α^5=ααααα$ καὶ $α^3=ααα$, ἄρα $α^5 \times α^3$ ἰσοῦται μὲ $ααααα \times ααα$, γινόμενον ἐξ ὀκτὼ ἴσων παραγόντων μὲ α καὶ ἑπομένως παριστανόμενον διὰ τοῦ $α^8$.

Ἐν γένει, ὅταν τὸ πολυπλασιαζόμενον γράμμα ἦναι τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τοὺς δύο παράγοντας, τότε γράφομεν αὐτὸ ἅπαξ εἰς τὸ γινόμενον ὑπὸ ἐκθέτην ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν τοῦ πολυπλασιαστέου καὶ τοῦ πολυπλασιαστοῦ.

Εὑρίσκομεν παρομοίως $α^4\, β^2 \times α^2\, β^3$ ἴσον μὲ $α^6\, β^5$· καὶ $α^2β \times αβ^3= α^3\, β^4$, κτλ.

Ἔστω ἤδη $α-β$ νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ γ.

Κατὰ μὲν πρῶτον σημειοῦμεν τὸν πολυπλασιασμὸν διὰ παρενθέσεως $(α-β)\,γ$· παρατηροῦμεν δὲ μετὰ ταῦτα, ὅτι τὸ γινόμενον εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ ἂν θεωρήσωμεν τὸ γ πολυπλασιαζόμενον ἐπὶ $α-β$ (ἀριθ. 56). Τούτου τεθέντος, ἵνα λάβωμεν τὸ γινόμενον ὑπὸ ἔκφρασιν ἀνεπτυγμένου πολυωνύμου, συλλογιζόμεθα ὡς ἑξῆς· ἂν πολυπλασιάσωμεν τὸ γ ἐπὶ μόνον τὸν α τὸ γινόμενον αγ θέλει εἶσθαι ἀνώτερον τοῦ δέοντος, ἐπειδὴ λαμβάνομεν ἀνώτερον πολυπλασιαστὴν τὸν α καὶ οὐχὶ τὸν α ἠλαττωμένον κατὰ β· καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη μονὰς τοῦ πολυπλασιαστοῦ προσδιορίζει εἰς τὸ γινόμενον ἕνα πολυπλασιαστέον ἄρα διὰ τὰς β μονάδας ἐμπεριέχονται εἰς τὸ γινόμενον β πολυπλασιαστέοι, τουτέστι τὸ γινόμενον αγ εἶναι ἀνώτερον τοῦ ζητουμένου κατὰ βγ· ὅθεν ἀφαιροῦντες τὸ βγ ἀπὸ τοῦ αγ λαμβάνομεν ἐξαγόμενον $αγ-βγ$, τὸ ὁποῖον θέλει εἶσθαι ἡ ἀκριβὴς παράστασις τοῦ ζητουμένου γινομένου.

Ἔστω πρὸς τούτοις $α-β$ νὰ πολυπλασιασθῇ ἐπὶ $γ-δ$.

Σημειοῦμεν κατὰ πρῶτον τὸ γινόμενον αὐτῶν ὡσαύτως διὰ παρενθέσεως $(α-β)\,(γ-δ)$. Ἵνα λάβωμεν δὲ ἓν πολυώνυμον, συλλογιζόμεθα πάλιν ὡς ἑξῆς· ἂν πολυπλασιάσωμεν τὸ $α-β$ ἐπὶ μόνον τὸν ὅρον γ τοῦ πολυπλασιαστοῦ, τὸ γινόμενον $αγ-βγ$ θέλει εἶσθαι ἀνώτερον τοῦ δέοντος. Ἐπειδὴ λαμβάνομεν ἀνώτερον πολυπλασιαστὴν κατὰ δ μονάδας· καὶ ἐπειδὴ δι᾽ ἑκάστην μονάδα τοῦ πολυπλασιαστοῦ εἰσέρχεται εἷς πολυπλασιαστέος εἰς τὸ γινόμενον, διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον $αγ-βγ$ ὑπερέχει τὸ ζητούμενον κατὰ δ πολυπλασιαστέους, τουτέστι κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ

$\alpha-\beta$ ἐπὶ δ, τὸ ὁποῖον εἶναι $\alpha\delta-\beta\delta$. Τούτου τεθέντος, ἀφαιροῦντες $\alpha\delta-\beta\delta$ ἀπὸ τοῦ $\alpha\gamma-\beta\gamma$ λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον· ὅθεν $\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha\delta+\beta\delta$ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ $\alpha-\beta$ ἐπὶ $\gamma-\delta$.

Ἐκ τῆς ἀναλύσεως ταύτης ἕπεται, ὅτι πολυπλασιάζομεν δυώνυμον ἐπὶ δυώνυμον, πολυπλασιάζοντες ἕκαστον ὅρον τοῦ πολυπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον τοῦ πολυπλασιαστοῦ· καθόσον δ' ἀφορᾷ τὰ σημεῖα τῶν ὅρων παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ αὐτὰ σημεῖα $+$ ἐπὶ $+$, ἢ $-$ ἐπὶ $-$, δίδουσιν εἰς τὸ γινόμενον $+$, τὰ ἀντίθετα δὲ σημεῖα $+$ ἐπὶ $-$, ἢ $-$ ἐπὶ $+$, δίδουσιν εἰς τὸ γινόμενον $-$· τουτέστιν οἱ ὁμώνυμοι παράγοντες δίδουσι προσθετικὸν γινόμενον, οἱ δὲ ἑτερώνυμοι ἀφαιρετικόν.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον εὑρίσκομεν παρομοίως $(\alpha+\beta)(\gamma-\delta)=\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\delta-\beta\delta$ καὶ $(\alpha-\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma-\beta\gamma+\alpha\delta-\beta\delta$.

172. *Διαίρεσις.*—Θέλομεν θεωρήσει μίαν μόνην περίστασιν τῆς διαιρέσεως, ὅταν δηλ. πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν μονώνυμον διὰ μονωνύμου.

Ἂν τὰ μονώνυμα ταῦτα διαφέρωσι κατὰ τὴν γραμματικὴν ποσότητα, οἷον α^3 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ β^2, τότε ἡ πρᾶξις σημειοῦται ἁπλῶς $\frac{\alpha^3}{\beta^2}$· καὶ δὲν εἶναι δυνατὴ ἄλλη τις παράστασις· ἀλλ' ὅταν ἀμφότερα τὰ μονώνυμα ἔχωσι τὴν αὐτὴν γραμματικὴν ποσότητα, τότε δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἁπλουστέραν ἔκφρασιν.

Ἔστω π. χ. α^5 νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ α^3· κατὰ μὲν πρῶτον σημειοῦμεν τὴν πρᾶξιν $\frac{\alpha^5}{\alpha^3}$. Παρατηροῦντες δὲ μετὰ ταῦτα, ὅτι ὁ διαιρετέος α^5 εἶναι γινόμενον τοῦ α^2 ἐπὶ α^3 (ἀριθ. 171) λαμβάνομεν ἀμέσως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης α^2, τουτέστιν αὐτὸ τὸ γράμμα α ὑπὸ ἐκθέτην ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν 5 καὶ 3 τοῦ διαιρετέου.

Κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον εὑρίσκομεν $\frac{\beta^8}{\beta^3}=\beta^5$, $\frac{\gamma^6}{\gamma^2}=\gamma^4$ καὶ $\frac{\alpha^3\beta^2}{\alpha^2\beta}=\alpha\beta$ κτλ.

173. Τοιαῦται εἶναι αἱ ὀλίγαι γνώσεις τοῦ συμβολικοῦ ὑπολογισμοῦ, τῶν ὁποίων ἀμέσως θέλομεν ἐννοήσει τὴν χρείαν. Ἵνα καταδείξωμεν δὲ ἀπὸ τοῦδε τὴν ὠφέλειαν τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων, ἀντὶ ἀριθμῶν, προτείνομεν τὰ ἑξῆς δύο ζητήματα.

Ά. Ποία μεταβολὴ προκύπτει εἰς τὸ κλάσμα ἐκ τῆς προσθέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος.

Ἔστω τὸ μὲν προκείμενον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, ὁ δὲ προστιθέμενος ἀριθμὸς μ, ὅθεν προκύπτει τὸ νέον κλάσμα $\frac{\alpha+\mu}{\beta+\mu}$.

Ἵνα κρίνωμεν ὁπότερον τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha+\mu}{\beta+\mu}$ εἶναι τὸ μεγαλήτερον, ἀνάγκη νὰ θέσωμεν αὐτὰ ὑπὸ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν. Ἐκ τούτου λαμβάνομεν τὰ ἰσοδύναμα $\frac{\alpha(\beta+\mu)}{\beta(\beta+\mu)}$ διὰ τὸ πρῶτον καὶ $\frac{\beta(\alpha+\mu)}{\beta(\beta+\mu)}$ διὰ τὸ δεύτερον. Καὶ ἐκτελουμένων τῶν πολυπλασιασμῶν, εὑρίσκομεν $\frac{\alpha\beta+\alpha\mu}{\beta^2+\beta\mu}$ καὶ $\frac{\alpha\beta+\beta\mu}{\beta^2+\beta\mu}$. Ἐπὶ τῶν τελευταίων τούτων παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν διαφέρουσι κατὰ τὸν δεύτερον ὅρον $\alpha\mu$ καὶ $\beta\mu$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{\beta}$ ὑπετέθη κλάσμα καὶ ἐπομένως $\alpha<\beta$, ἄρα καὶ $\alpha\mu<\beta\mu$ καὶ ἐπομένως ὁ ἀριθμητὴς $\alpha\beta+\alpha\mu<\alpha\beta+\beta\mu$. Ὅθεν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\beta+\beta\mu}{\beta^2+\beta\mu}$, ἢ μᾶλλον τὸ ἰσοδύναμον $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἔλασσον τοῦ $\frac{\alpha\beta+\beta\mu}{\beta^2+\beta\mu}$ ἰσοδυνάμου μὲ τὸ $\frac{\alpha+\mu}{\beta+\mu}$. Ἐπομένως ἡ πρόσθεσις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπέφερεν αὔξησιν εἰς τὸ κλάσμα.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ ἀποδεικνύομεν, ὅτι εἰς τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν $\frac{\alpha}{\beta}$, τὸν ἀνώτερον τῆς μονάδος, ἡ πρόσθεσις αὐτὴ ἐπιφέρει ἐλάττωσιν· διότι τότε ἔχομεν ἐξ αὐτῆς τῆς συνθήκης $\alpha>\beta$, καὶ ἐπομένως $\alpha\mu>\beta\mu$ ἢ $\alpha\beta+\alpha\mu>\alpha\beta+\beta\mu$· ὅθεν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ δευτέρου εἶναι ἐλάσσων τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ πρώτου, καὶ ἐπομένως ὁ δεύτερος εἶναι ἐλάσσων τοῦ δεδομένου κλασματικοῦ ἀριθμοῦ.

Β΄. Ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἰδίων.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β. Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θέλει εἶσθαι $\alpha+\beta$, ἡ δὲ διαφορὰ $\alpha-\beta$. Ἐκ τούτου τὸ ζήτημα ἄγεται εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ γινομένου $(\alpha+\beta)$ $(\alpha-\beta)$· ἐκτελοῦντες δὲ τὸν πολυπλασιασμὸν εὑρίσκομεν $\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2$ καὶ ἀπαλείφοντες τοὺς ὁμοίους καὶ ἑτερωνύμους ὅρους $+\alpha\beta$ καὶ $-\alpha\beta$ λαμβάνομεν $\alpha^2-\beta^2$. Τὸ τελευταῖον τοῦτο ἐξαγόμενον ἑρμηνεύει, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 25 καὶ 12· τὸ μὲν ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 37, ἡ δὲ διαφορὰ 13· πολυπλασιάζοντες τὸν 37 ἐπὶ 13 εὑρίσκομεν 481. Τὸ αὐτὸ τοῦτο λαμβάνομεν καὶ ἀπὸ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τοῦ 25 καὶ 12, τουτέστιν $25^2-12^2=625-144=481$.

Τὰ ζητήματα ταῦτα δίδουσιν ἱκανὴν ἰδέαν περὶ τῆς ὠφελείας τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων εἰς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν. Δι᾽ αὐτῶν, ὡς εἴδομεν, ἐκτὸς τοῦ ὅτι καθολικεύονται οἱ συλλογισμοί, διατηρεῖται πρὸς τούτοις καὶ τὸ ἴχνος τῶν ἐκτελεστέων πράξεων ἐπὶ τῶν εἰς τὸ ζήτημα ἀναφερομένων ἀριθμῶν· ἐπειδὴ δὲν συγχωνεύονται ἀλλήλοις, ὡς τοῦτο συμβαίνει ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν χαρακτήρων.

Ἐπανερχόμενοι ἤδη εἰς τὴν προτέραν σειρὰν τοῦ λόγου, προχωροῦμεν εἰς τὴν ἔρευναν τινῶν θεμάτων, περὶ τῶν ὁποίων ἐπραγματεύθημεν εἰς τὸ πρῶτον μέρος. Οὕτω θέλομεν ἀνακαλύψει νέας ἰδιότητας καὶ ἁπλουστέρους κανόνας διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν διαφόρων ἀριθμητικῶν ἐργασιῶν.

§. 6′. Περὶ τῆς διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν.

174. Ἡ ἰδιότης, τὴν ὁποίαν ἔχουσι τινὲς ἀριθμοὶ νὰ διαιρῶνται ἀκριβῶς δι᾽ ἄλλων, καὶ ἡ ἀναζήτησις τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος σχηματίζουσι μίαν τῶν ὠφελιμωτάτων θεωριῶν τῆς Ἀριθμητικῆς. Ἡ θεωρία αὕτη ἐπιστηρίζεται εἰς ἀρχάς τινας, τῶν ὁποίων ἡ ἔκθεσις ἀπαιτεῖ πολλὴν τάξιν. Ἐξηγοῦμεν δὲ αὐτὰς διαδοχικῶς.

Προοιμιώδεις ὁρισμοί.— Ἀκέραιός τις ἀριθμὸς λέγεται πολυπλάσιος ἑτέρου, ὅταν τρίτος ἀριθμός, πολυπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον, παράγῃ τὸν πρῶτον· οἷον ὁ 24 εἶναι πολυπλάσιος τοῦ 6, ἐπειδὴ τετράκις ὁ 6 σχηματίζει τὸν 24,

Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς ἀκριβὴς διαιρέτης ἄλλου, λέγεται παράγων, ἢ ὑποπολυπλάσιος τοῦ διαιρουμένου, ὡς ὁ 6 πρὸς τὸν 24· ἐπειδὴ 24 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 6 καὶ παράγει ἀκέραιον πηλίκον 4.

Ἀκέραιος ἀριθμός, μὴ ἔχων διαιρέτην, εἰμὴ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα, λέγεται πρῶτος ἀπολύτως ἢ ἁπλῶς πρῶτος. Θεωροῦνται δὲ οἱ πρῶτοι ἀριθμοί, ὡς πρωτότυποι, ἐξ ὧν παράγονται οἱ πολυπλάσιοι διὰ πολυπλασιασμοῦ· οἷον 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13 κτλ. Ἐξ ὧν προκύπτουσιν οἱ πολυπλάσιοι 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, ... 40, 42, 44, . . . , Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ λέγονται πρῶτοι σχετικῶς, ἢ πρὸς ἀλλήλους, ὅταν ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην μόνον τὴν μονάδα, ἥτις εἶναι γενικὸς διαιρέτης ὅλων τῶν ἀριθμῶν· οἷον 15 καὶ 28, διαιρούμενοι ὁ μὲν διὰ τοῦ 1, 3, 5 καὶ 15, ὁ δὲ διὰ τοῦ 1, 2, 4, 7, 14 καὶ 28, συμφωνοῦσι, κατὰ μόνον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα.

Τοὺς ὁρισμοὺς τούτους ἐδώκαμεν καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν 91.

175. *Πρώτη ἀρχή.* — Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς Π, διαιρῶν ἀκριβῶς ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου $A \times B$, διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τὸ γινόμενον. Ἢ ἄλλως, πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἀκριβὴς διαιρέτης ἑτέρου, εἶναι καὶ διαιρέτης ὅλων τῶν πολυπλασίων αὐτοῦ (ἴδ. ἀριθ. 92).

Τῷ ὄντι ἔστω Κ. τὸ ὑποτιθμένον ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ τοῦ Π, θέλομεν ἔχει $A = \Pi \times K$. Πολυπλασιάζοντες ἑκάτερον μέλος τῆς ἰσότητος ἐπὶ Β συνάγομεν $AB = \Pi \times K \times B$, ἢ $AB = \Pi \times KB$ (ἀριθ. 54) καὶ διαιροῦντες διὰ Π λαμβάνομεν $\frac{AB}{\Pi} = KB$.

Ἐκ τούτου δείκνυται, ὅτι τὸ πολυπλάσιον ΑΒ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ Π καὶ δίδει πηλίκον ἀκέραιον ΚΒ, ἤτοι ὅμοιον πολυπλάσιον Κ. τοῦ πρώτου πηλίκου Β.

176. *Δευτέρα ἀρχή.* — Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸ γινόμενον δύο παραγόντων, εἶναι δὲ πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα παράγοντα, πρέπει νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν ἕτερον παράγοντα Β.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Π εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἕπεται ὅτι, ἂν ζητήσωμεν μεταξὺ αὐτῶν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην, θέλομεν εὕρει ὡς τελευταῖον ὑπόλοιπον τὴν μονάδα. Οὕτω δὲ σημειοῦντες διὰ K, K', K'', K''' κτλ. τὰ διαδοχικὰ πηλίκα καὶ διὰ $P, P', P'' \ldots . 1$ τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα, δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν τὸν πίνακα τῆς πράξεως κατὰ τὴν ἑξῆς γενικὴν παράστασιν.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & K & K' & K'' & K''' \\ \hline A & \Pi & P & P' & P'' \\ \hline P & P' & P'' & 1 & \end{array}$$

Ἐκ τούτου ἕπονται αἱ ἑξῆς ἰσότητες:

$$A = \Pi K + P$$
$$\Pi = PK' + P'$$
$$P = P'K'' + P''$$
$$P' = P''K''' + 1$$

Πολυπλασιάζοντες δὲ ἑκάτερον μέλος ἐπὶ Β καὶ διαιροῦντες διὰ Π λαμβάνομεν

$$\frac{AB}{\Pi} = BK + \frac{PB}{\Pi}$$

$$B = \frac{BPK'}{\Pi} + \frac{P'B}{\Pi}$$

$$\frac{BP}{\Pi} = \frac{BP'K''}{\Pi} + \frac{P''B}{\Pi}$$

$$\frac{BP'}{\Pi} = \frac{BP''K'''}{\Pi} + \frac{B}{\Pi}$$

Ὅθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς ἐπαγωγικὸς συλλογισμός. Ἐπειδὴ ΑΒ ἐξ ὑποθέσεως διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ Π καὶ προσδιορίζεται ἀκέραιον πηλίκον· τοῦτο δὲ ὡς ὅλον συγκροτεῖται ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρους ΒΚ καὶ τοῦ κλασματικοῦ $\frac{PB}{\Pi}$, ἄρα καὶ τὸ δεύτερον μέρος $\frac{BP}{\Pi}$ ἰσοῦται ὡσαύτως μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν κατὰ τὴν Γ΄ ἀρχὴν (ἀριθ. 92) καὶ ἐπομένως ΒΡ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ Π.

Μεταβαίνοντες εἰς τὴν δευτέραν ἰσότητα λέγομεν ὡσαύτως· ἐπειδὴ τὸ ὅλον Β εἶναι ἀκέραιον καὶ τὸ πρῶτον μέρος αὐτοῦ $\frac{BPK'}{\Pi}$ ὁμοίως ἀκέραιον κατὰ τὴν πρώτην παρατήρησιν, ἐκ τοῦ ὅτι ΒΡ διαιρεῖται διὰ τοῦ Π καὶ ἐπομένως καὶ τὸ πολυπλάσιον αὐτοῦ ΒΡΚ, ἄρα καὶ τὸ δεύτερον μέρος $\frac{P'B}{\Pi}$ πρέπει νὰ ἦναι ἀκέραιον· ὅθεν ΒΡ΄ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ Π.

Συλλογιζόμενοι ὡσαύτως ἐπὶ τῆς τρίτης ἰσότητος λέγομεν· ἐπειδὴ κατὰ τὸν πρῶτον συλλογισμὸν τὸ ὅλον ΒΡ διαιρεῖται διὰ τοῦ Π, κατὰ δὲ τὸν ἀνωτέρω, διαιρεῖται καὶ τὸ πρῶτον μέρος ΒΡ΄Κ, καθὸ πολυπλάσιον τοῦ ΒΡ΄, ἄρα καὶ τὸ δεύτερον μέρος ΒΡ΄΄ διαιρεῖται ὡσαύτως διὰ τοῦ Π.

Μεταβαίνοντες τέλος εἰς τὴν τετάρτην ἰσότητα λέγομεν παρομοίως τὸ ὅλον $\frac{BP'}{\Pi}$ εἶναι ἀκέραιον, ἐπειδὴ τὸ ΒΡ΄ κατὰ τὸν δεύτερον συλλογισμὸν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ Π, τὸ πρῶτον μέρος $\frac{BP''K'''}{\Pi}$ εἶναι ὁμοίως ἀκέραιον, ἐπειδὴ τὸ ΒΡ'', κατὰ τὸν προηγούμενοε, διαιρεῖται διὰ τοῦ Π καὶ ἐπομένως τὸ πολυπλάσιον αὐτοῦ ΒΡ''Κ'''· ἄρα καὶ τὸ δεύτερον μέρος $\frac{\mathrm{B}}{\Pi}$ εἶναι παρομοίως ἀκέραιον. Ὅθεν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων Β τοῦ γινομένου ΑΒ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ Π, κατὰ τὴν προτεθεῖσαν ἀρχήν.

Σημείωσις. — Ἀναφέρομεν εἰς τὴν πρότασιν, ὅτι ὁ Π πρέπει νὰ ἦναι πρῶτος πρὸς ἕνα τῶν παραγόντων· ἐπειδὴ π. χ. ὁ 56×15, ἤτοι 840 διαιρεῖται μὲν διὰ τοῦ 12 καὶ δίδει πηλίκον 70, ἐν ᾧ οὐδέτερος τῶν παραγόντων 56 καὶ 15 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 12. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην συμβαίνει, ὅτι ὁ 12 ἐξισούμενος μὲ 4×3 ἔχει τὸν παράγοντα 4 ἀπὸ τοῦ 56, τὸν δὲ 3 ἀπὸ τοῦ 15· ὥστε 56×15 ἰσοῦται μὲ $14\times 4 \times 5\times 3$ ἢ τέλος μὲ 70×12· καὶ ἐπομένως εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 12. Ἀνάλογόν τι συμβαίνει καὶ εἰς ἄλλας ὁμοίας περιστάσεις.

177. *Τρίτη ἀρχή.*—Πᾶς ἀριθμὸς Π, ἀπολύτως πρῶτος, διαιρῶν ἀκριβῶς τὸ γινόμενον $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$, πρέπει νὰ διαιρῇ ἕνα τῶν παραγόντων.

Διότι, ἂν δὲν διαιρῇ τὸν Α, καὶ ἐπομένως ἦναι πρῶτος πρὸς αὐτὸν, τότε πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον Β κατὰ τὴν προηγουμένην ἀρχήν.

Ἐκ τῆς ἀρχῆς ταύτης ἕπονται αἱ ἑξῆς συνέπειαι.

178. Α'. Ἀριθμός τις Π, ἀπολύτως πρῶτος, διαιρῶν τὸ τετράγωνον A^2, ἢ ὁποιανδήποτε δύναμιν A^μ, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὴν ῥίζαν Α.

Διότι A^2 σημαίνει $\mathrm{A}\times\mathrm{A}$, ἐκ τούτου ὁ Π, διαιρῶν τὸ γινόμενον A^2, πρέπει νὰ διαιρῇ ἕνα τῶν παραγόντων. Ἐπειδὴ δὲ οὗτοι εἶναι ἴσοι, ἄρα πρέπει νὰ διαιρῇ τὴν ῥίζαν. Ὡσαύτως A^3 εἶναι $\mathrm{A}^2\times\mathrm{A}$· ἐπομένως ἂν ὁ Π διαιρῇ τὸ γινόμενον A^3, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ ἕνα τῶν παραγόντων Α, ἢ A^2, τουτέστι πρέπει νὰ διαιρῇ τὴν ῥίζαν. Ὁμοίως λέγομεν καὶ περὶ τῶν λοιπῶν δυνάμεων.

179. Β'. Πᾶς ἀριθμὸς Π, πρῶτος πρὸς ἑκάτερον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$, εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Διότι ἀριθμός τις ἀπολύτως πρῶτος, ὅστις διαιρεῖ τὸν ΑΒ πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν Α ἢ τὸν Β, κατὰ τὴν τρίτην ἀρχὴν, ὥστε ὁ Α καὶ ὁ Π, ἢ ὁ Β καὶ ὁ Π, δὲν εἶναι σχετικῶς πρῶτοι· ὅθεν καταστρέφεται ἡ συνθήκη τῆς προτάσεως.

180. Γ'. Τὸ γινόμενον $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\Gamma\times\Delta$ . . . ὅσων δήποτε παραγόντων δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας, ἐκτὸς τῶν εἰσερχομένων εἰς τὴν σύνθεσιν τῶν παραγόντων Α, Β, Γ, Δ. . . .

Διότι πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς, διαιρῶν τὸ γινόμενον ΑΒΓΔ καὶ μὴ διαιρῶν ἕνα τῶν παραγόντων Δ πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον ΑΒΓ. Ὡσαύτως διαιρῶν τὸ γινόμενον ΑΒΓ καὶ μὴ διαιρῶν τὸν Γ, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ΑΒ, ἑπομένως μὴ διαιρῶν τὸν Β, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν Α· ὥστε ἀνάγκη εἷς τούτων τῶν παραγόντων νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς· ὅπερ εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Τὴν αὐτὴν ἰδιότητα ἑρμηνεύομεν ἐπίσης λέγοντες, ἀριθμός τις, συντεθεὶς διὰ τοῦ πολυπλασιασμοῦ τινων παραγόντων, δὲν δύναται νὰ παραχθῇ καὶ διὰ τοῦ πολυπλασιασμοῦ ἑτέρων, ἐχόντων διαφόρους πρώτους παράγοντας, ἢ τοὺς ἐμπεριεχομένους εἰς τοὺς πρότερον πολυπλασιασθέντας.

181. *Τετάρτη καὶ τελευταία ἀρχή.* — Πᾶς ἀριθμὸς Α, διαιρετὸς διὰ δύο ἢ πολλῶν ἄλλων α, β, γ, δ . . . κτλ. πρώτων πρὸς ἀλλήλους διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρεῖς κτλ.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ Α διαιρεῖται διὰ τοῦ α, δίδων πηλίκον τι π, ἔχομεν διὰ τοῦτο $A=\alpha\pi$. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ ὁ β διαιρεῖ τὸν Α, ἄρα διαιρεῖ τὸ ἰσοδύναμον γινόμενον απ· καὶ ἐπειδὴ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν παράγοντα α, πρέπει κατὰ τὴν δευτέραν ἀρχὴν νὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον παράγοντα π. Ἐκ τούτου σημειοῦντες τὸ πηλίκον αὐτοῦ διὰ π' ἔχομεν $\pi=\beta\pi'$, καὶ ἑπομένως $A=\alpha\pi=\alpha\beta\pi'$. Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος $A=\alpha\beta\pi'$ παρατηροῦμεν φανερῶς τὴν ἀκριβῆ διαίρεσιν τοῦ Α διὰ τοῦ αβ.

Ὡσαύτως, ἐπειδὴ ὁ γ εἶναι μὲν ἀκριβὴς διαιρέτης τοῦ Α, ἢ τοῦ ἴσου αβπ', πρῶτος δὲ πρὸς τοὺς παράγοντας α καὶ β καὶ ἑπομένως πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν αβ, πρέπει νὰ διαιρῇ ἐξ ἀνάγκης τὸν ἕτερον παράγοντα π'. Ὅθεν σημειοῦντες τὸ πηλίκον αὐτοῦ διὰ τοῦ π'' συνάγομεν $\pi'=\gamma\pi''$ καὶ ἑπομένως εἰς τὴν ἰσότητα $A=\alpha\beta\pi'$ ἀντικαθιστῶντες τὸ ἰσοδύναμον τοῦ π', συνάγομεν $A=\alpha\beta\gamma\pi''$, ἐξ οὗ καταφαίνεται ἡ ἀκριβὴς διαίρεσις τοῦ Α διὰ τοῦ γινομένου αβγ. Ὁμοίως λέγομεν καὶ διὰ τοὺς ἄλλους πρώτους παράγοντας τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ Α.

182. *Συνέπεια.*—Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ . . . πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, εἰσέρχωνται ὡς παράγοντες πολλάκις εἰς τὸν Α καὶ σημειωθῶσιν διὰ τοῦ μ, ν, π, . . . οἱ ἀριθμοὶ τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων τοῦ Α δι' ἑκάστου τῶν μνησθέντων πρώτων παραγόντων, τότε ὁ δεδομένος ἀριθμὸς Α διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου $\alpha^{\mu}\ \beta^{\nu}\ \gamma^{\pi}$ . . . καὶ δι' ὅλων τῶν ἀριθμῶν, ὅσους δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν πολυπλασιάζοντες ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρεῖς κτλ. τὰς διαφόρους δυνάμεις τῶν α, β, γ . . . ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς μ διὰ τὴν α, τῆς ν διὰ τὴν β, τῆς π διὰ τὴν γ. κτλ.

Διότι, ὄντων τῶν ἀριθμῶν α, β, γ . . . πρώτων πρὸς ἀλλήλους, ἐπίσης εἶναι καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν α^{μ}, β^{ν}, γ^{π} . . . . ὅθεν τὰ γινόμενα αὐτῶ ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρεῖς κτλ. (ἀριθ. 181) πρέπει νὰ ἦναι ἀκριβεῖς διαιρέται τοῦ Α.

Ἡ τελευταία αὕτη ἀρχὴ θεωρεῖται ὡς βάσις τῆς ἀναζητήσεως τῶν ἁπλῶν καὶ συνθέτων διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος, περὶ τῆς ὁποίας θέλομεν διαλάβει ἐν τοῖς ἑφεξῆς.

183. *Χαρακτηριστικὰ τῆς διαιρετότητος ἀριθμοῦ τινος δι᾽ ἄλλων.*

Ὑπάρχουσι σημεῖα, διὰ τῶν ὁποίων ἐνίοτε γνωρίζομεν προχείρως, ἂν ἀριθμός τις ἦναι, ἢ μὴ διαιρετὸς δι᾽ ἄλλων· ὅπερ ἀποβαίνει ὠφελιμώτατον εἰς τὸν ὑπολογισμόν. Οἱ συλλογισμοί, διὰ τῶν ὁποίων ἀποδεικνύομεν τὰ χαρακτηριστικὰ ταῦτα, στηρίζονται ἐπὶ τῆς ἑξῆς ἀρχῆς.

Ἀριθμός τις Δ διαιρῶν ἀκριβῶς ἑκάτερον τῶν μερῶν Β καὶ Γ ἄλλου τινὸς Α, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὅλον· διαιρῶν δὲ τὸ ἓν μέρος Β καὶ μὴ διαιρῶν τὸ ἕτερον Γ, δὲν διαιρεῖ οὔτε τὸ ὅλον Α· τοιοῦτον δὲ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὅλου, ὁποῖον καὶ τὸ τοῦ ἀδιαιρέτου μέρους.

Τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως ταύτης ἀποδεικνύεται ἀμέσως. Διότι διαιροῦντες διὰ Δ ἑκάτερον μέλος τῆς ἰσότητος $Α=Β+Γ$ λαμβάνομεν $\frac{Α}{Δ}=\frac{Β}{Δ}+\frac{Γ}{Δ}$. Ἐκ τοῦ ὁποίου ἐξάγομεν, ὅτι τῶν Β καὶ Γ ὄντων κατὰ τὴν ὑπόθεσιν διαιρετῶν διὰ τοῦ Δ, προσδιορίζονται διὰ τοῦτο ἀκέραια πηλίκα· ἑπομένως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ἐξισούμενον μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ Δ, εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός· τουτέστιν ὁ Α διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ Δ.

Ὅσον δὲ περὶ τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς προτάσεως, εἶναι φανερὸν κατὰ πρῶτον, ὅτι, τοῦ μὲν Β, φέρ᾽ εἰπεῖν, ὄντος διαιρετοῦ διὰ τοῦ Δ, τοῦ δὲ Γ ἀδιαιρέτου, πρέπει καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν Α νὰ μὴ διαιρῆται. Διότι ἄλλως ἠθέλομεν ἔχει τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ Δ ἴσον μὲ κλασματικὸν ἀριθμόν, μὴ ἀναγόμενον εἰς ὁλοσχερῆ, ὁποῖος θέλει εἶσθαι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πηλίκων τῆς διαιρέσεως τῶν Β καὶ Γ διὰ τοῦ Δ.

Λέγομεν ἤδη, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ Δ εἶναι τὸ αὐτό, ὁποῖον καὶ τὸ τοῦ ἀδιαιρέτου μέρους Γ. Διότι ἔστω τὸ μὲν πηλίκον τοῦ Β διὰ Δ ἴσον μὲ Π, τὸ δὲ τοῦ Γ ἔστω Π΄ μὲ ὑπόλοιπον Ρ. Ἐκ τούτου ἔχομεν $Β=ΔΠ$ καὶ $Γ=ΔΠ'+Ρ$· ἑπομένως ὁ τύπος $Α=Β+Γ$ τρέπεται εἰς $Α=ΔΠ+ΔΠ'+Ρ$, ἢ $Α=Δ\,(Π+Π')+Ρ$ καὶ διαιρέσει διὰ Δ ἔχομεν $\frac{Α}{Δ}=Π+Π'+\frac{Ρ}{Δ}$· ἐξ οὗ γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ Α διαιρούμενος διὰ τοῦ Δ δίδει πηλίκον $Π+Π'$ μὲ ὑπόλοιπον Ρ, τὸ τοῦ ἀδιαιρέτου μέρους Γ.

184. Μεταβαίνομεν ἤδη εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν χαρακτηριστικῶν τῆς διαιρετότητος.

Ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 5, 4 καὶ 25, 8 καὶ 125.

ά. Πᾶς ἀριθμὸς, λήγων εἰς ἕνα τῶν χαρακτήρων 0, 2, 4, 6, 8, διαιρεῖται διὰ τοῦ 2.

Διότι ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς, π. χ. 38576, δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς δύο μέρη εἰς μονάδας καὶ εἰς δεκάδας, τουτέστι $38576=38570+6$· καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν πρῶτον μέρος, καθὸ πολυπλάσιον τοῦ 10, εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 2, τὸ δὲ δεύτερον ἐπίσης, ὡς ἐκ τῆς ἰδιότητος τοῦ 6, καὶ τῶν ὁμοίων 2, 4, 8· ἄρα καὶ τὸ ὅλον, ἤτοι ὁ 38576, διαιρεῖται διὰ τοῦ 2.

Ἀντιστρόφως ἀριθμός τις λήγων εἰς 1, 3, 5, 7, 9, οἷον ὁ 6713, δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 2· διότι, ἀναλυομένου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ὡσαύτως εἰς δεκάδας καὶ μονάδας, τὸ μὲν πρῶτον μέρος 6710 διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, τὸ δὲ δεύτερον οὐχί· ἑπομένως δὲν διαιρεῖται τὸ ὅλον 6713.

Οἱ διαιρούμενοι διὰ τοῦ 2 ἀριθμοὶ λέγονται ἄρτιοι, οἱ δὲ ἄλλοι περιττοί. Καὶ τῶν μὲν ἀρτίων ὁ γενικὸς τύπος εἶναι 2μ, τῶν δὲ περιττῶν ὁ $2\mu+1$· διότι ἀποδίδοντες εἰς τὸ μ τιμὰς 0, 1, 2, 3, 4, κτλ., προσδιορίζομεν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου τύπου ὅλους τοὺς ἀρτίους 2, 4, 6, 8, ... ἐκ τοῦ δευτέρου δὲ ὅλους τοὺς περιττοὺς 1, 3, 5, 7, . . .

β΄. Πᾶς ἀριθμὸς, λήγων εἰς 0 ἢ εἰς 5, εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 5.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτὴ, ὡς ἀνωτέρω. Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 9815· οὗτος χωριζόμενος εἰς τὰ δύο μέρη $9810+5$ ἀμφότερα διαιρετὰ διὰ τοῦ 5, εἶναι καὶ αὐτὸς διαιρετὸς διὰ τοῦ 5. Ἐκ τοῦ ἐναντίου ἀριθμός τις λήγων εἰς ἕτερον χαρακτῆρα, οἷον 1, 2, 3 κτλ., δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 5. Τοιοῦτον δὲ θέλει εἶσθαι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ὅλου, ὁποῖον τὸ τοῦ ἀδιαιρέτου ληκτικοῦ χαρακτῆρος (ἀριθ. 183). Οὕτως ὁ ἀριθμὸς 34789, ἴσος μὲ $34780+9$ διαιρούμενος διὰ τοῦ 5, ἀφήνει ὑπόλοιπον 4, ὁποῖον καὶ τὸ δεύτερον ἀδιαίρετον μέρος 9 κτλ.

γ΄. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται ἢ οὐχὶ διὰ τοῦ 4 ἢ τοῦ 25, καθόσον ὁ ἀριθμὸς τῶν δύο τελευταίων χαρακτήρων διαιρεῖται ἢ οὐχὶ διὰ τοῦ 4 ἢ τοῦ 25.

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, χωριζόμενοι εἰς τὰ δύο μέρη, εἰς τὸ τῶν ἑκατοντάδων, καὶ εἰς τὸ τῶν δεκάδων καὶ μονάδων ἔχουσι τὸ πρῶτον μέρος πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ 4 ἢ τοῦ 25, καθὸ πολυπλάσιον τοῦ 100. Οὕτως ἐκ τῆς ἀκριβοῦς ἢ μὴ διαιρέσεως τοῦ δευτέρου μέρους ἐξαρτᾶται καὶ ἡ ὁμοία διαίρεσις τοῦ ὅλου.

Π. χ. 36784 ἴσος μὲ $36700+84$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 4.

Ὡσαύτως 3675 ἴσος μὲ $3600+75$ διαιρεῖται διὰ 25.

Ἀντιστρόφως· ὁ ἀριθμὸς 3663, ἴσος μὲ $3600+63$ διαιρούμενος διὰ τοῦ 4 ἢ 25, ἀφήνει ὑπόλοιπον 3 ἢ 13, ὁποῖον δίδει καὶ ἡ διαίρεσις τοῦ 63 διὰ τοῦ 4 ἢ 25 κτλ.

δ'. Ἀριθμός τις διαιρεῖται ἢ οὐχὶ διὰ τοῦ 8 ἢ 125 καθόσον οἱ τρεῖς τελευταῖοι χαρακτῆρες συνιστῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν ἢ ἀδιαίρετον διὰ τοῦ 8 ἢ 125.

Ἡ ἀπόδειξις ἐξ ἀναλογίας εἶναι ἡ αὐτὴ ὡς καὶ ἀνωτέρω· ἔχει δὲ ὡς βάσιν, ὅτι $1000=125\times8$.

185. *Ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 9.*—Πᾶς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων, θεωρουμένων ὑπὸ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν, εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9, εἶναι καὶ αὐτὸς διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου σημειοῦμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ἂν ἀπὸ δύναμίν τινα τοῦ 10, ἤτοι ἀπὸ τὴν μονάδα παρακολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν, ἀφαιρέσωμεν 1, τὸ ὑπόλοιπον θέλει εἶσθαι διαιρετὸν διὰ τοῦ 9. Διότι τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο, ἐκφραζόμενον διὰ μόνου τοῦ χαρακτῆρος 9 ἐπαναλαμβανομένου εἰς τὰς διαφόρους τάξεις, εἰς τὰς ὁποίας ὑπῆρχον τὰ μηδενικὰ τῆς δυνάμεως τοῦ 10, ἔχει ὅλα τὰ μέρη αὐτοῦ διαιρετὰ διὰ τοῦ 9 καὶ ἐπομένως διαιρεῖται ὁ ἀριθμός. Οὕτως $10^5-1=100000-1=99999=90000+9000+900+90+9$.

Ἔστω ἤδη ἀριθμός τις οἱοσδήποτε Α, συνιστάμενος ἐκ μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων κτλ. ὁσωνδήποτε, ὅστις ὑπὸ τὴν γενικὴν ἔκφρασιν παρίσταται διὰ τῆς ἰσότητος $A=\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$.

Ἀναλύοντες τὸν ἀριθμὸν εἰς τὰ μέρη αὐτοῦ κατὰ τὰς ἀρχὰς τῆς ἀριθμήσεως ἔχομεν κατὰ πρῶτον $A=\alpha+10\,\beta+10^2\,\gamma+10^3\,\delta+10^4\,\varepsilon$.

Παρατηροῦντες δὲ, ὅτι 10β ἰσοῦται μὲ $(10-1)\,\beta+\beta$· ἤτοι $9\beta+\beta$ καὶ ὁμοίως $10^2\gamma$ ἰσοῦται μὲ $(10^2-1)\,\gamma+\gamma$ κτλ, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφήν.

$$A=\left\{\begin{array}{llll}(10-1)\,\beta+ & (10^2-1)\,\gamma+ & (10^3-1)\,\delta+ & (10^4-1)\,\varepsilon \\ \alpha+\beta & +\gamma & +\delta & +\varepsilon.\end{array}\right.$$

Ἐκ τῆς ὁποίας βλέπομεν, ὅτι τὰ μέρη $(10-1)\,\beta$, $(10^2-1)\,\gamma$ κτλ. εἶναι διαιρετὰ διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9. Διότι αἱ ἐν παρενθέσει ποσότητες, ὡς εἴρηται ἀνωτέρω, εἶναι διαιρεταὶ διὰ τοῦ 3 καὶ 9, καὶ ἐπομένως καὶ τὰ πολυπλάσια αὐτῶν ἐπὶ β, γ, δ, ε. Ὅθεν διακρίνοντες τὸν ἀριθμὸν Α εἰς δύο μέρη, τὸ μὲν ἐκ τῶν γινομένων $(10-1)\,\beta$, $(10^2-1)\,\gamma$ κτλ, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Β. τὸ δὲ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν χαρακτήρων α, β, γ, δ, ε, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Γ, συνάγομεν $A=B+\Gamma$. Καὶ ἐπειδὴ τὸ μὲν πρῶτον μέρος Β, καθὸ συνιστάμενον ἐκ πολυπλασίων τοῦ 9, εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ 3 καὶ τοῦ 9· ἕπεται ἄρα ὅτι ἡ διαίρεσις τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ Α, θεωρουμένου ὡς ὅλου, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ δευτέρου μέρους Γ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ ὑπὸ τὴν ἀπόλυτον αὐτῶν τιμήν. Ὅθεν, ἂν τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἀκριβῶς διαιρετὸν, διαιρεῖται καὶ ὁ ὅλος ἀριθμὸς, ἂν δὲ διαιρούμενον ἀφήνῃ ὑπόλοιπον, πρέπει καὶ ὁ δεδομένος ἀριθμὸς νὰ ἀφήνῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

Π. χ. 140889 διαιρεῖται διὰ τοῦ 3· ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων 30 διαιρεῖται διὰ τοῦ 3.

Ὁμοίως 15678 διαιρεῖται διὰ τοῦ 3 καὶ τοῦ 9. Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων 27 εἶναι ὡσαύτως διαιρετὸν διὰ τοῦ 3 καὶ 9.

Τέλος 857938 διαιρούμενος διὰ μὲν τοῦ 3 ἀφήνει ὑπόλοιπον 1, διὰ δὲ τοῦ 9 ἀφήνει 4, ὁποῖα εἶναι καὶ τὰ ὑπόλοιπα τοῦ ἀθροίσματος τῶν χαρακτήρων αὐτοῦ 40, διαιρουμένου διὰ τοῦ 3 ἢ 9.

186. *Ἰδιότητες τοῦ ἀριθμοῦ.* 11 — ά. Πᾶσα ἀρτία δύναμις τοῦ 10, οἷον 10^2, 10^4, 10^6, καὶ ἐν γένει $10^{2\nu}$, ἐλαττουμένη κατὰ μονάδα, εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ τοῦ 11.

Διότι κατὰ πρῶτον ὁ ἀριθμὸς 10^2-1, ἴσος μὲ $100-1=99$, εἶναι ὡς ἐξ αὐτῆς τῆς φύσεως αὐτοῦ διαιρετὸς διὰ τοῦ 11. Ἐκ τούτου καὶ πᾶσα ἀρτία δύναμις τοῦ 10, ἐλαττουμένη κατὰ μονάδα, οἷον $10^4-1=9999$, ἢ $10^6-1=999999$ καὶ ἐν γένει $10^{2\nu}-1=99999999....$, διαιρεῖται ἐπίσης διὰ τοῦ 11· διότι οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ παριστανόμενοι διὰ τοῦ 9, γραφομένου ἀρτιάκις χωρίζονται εἰς μέρη 99, 99, 99 . . . . κτλ. διαιρετὰ διὰ τοῦ 11 καὶ ἑπομένως εἶναι καὶ αὐτοὶ διαιρετοὶ ὡσαύτως.

β΄. Πᾶσα περιττὴ δύναμις τοῦ 10, οἷον 10^1, 10^3, 10^5 . . . καὶ ἐν γένει $10^{2\nu+1}$, αὐξανομένη κατὰ μονάδα, διαιρεῖται διὰ τοῦ 11.

Διότι ἡ περιττὴ δύναμις τοῦ 10, ἐκφραζομένη διὰ τῆς μονάδος, παρακολουθουμένης ὑπὸ περιττοῦ ἀριθμοῦ μηδενικῶν, ἐκφράζει τοὺς ἀριθμοὺς 10, 1000, 100000 κτλ. οὗτοι δὲ οἱ ἀριθμοὶ αὐξανόμενοι κατὰ μονάδα δίδουσιν ἀριθμοὺς, γραφομένους διὰ δύο ἀκροτελευταίων μονάδων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχονται οὐδὲν, ἢ ζεύγη μηδενικῶν, οἷον 11, 1001, 100001 κτλ. Φανερὸν ἤδη, ὅτι ὁ μὲν 11 διαιρεῖται δι᾽ ἑαυτοῦ, ὁ δὲ δεύτερος 1001, διαιρούμενος μέχρι τῶν δεκάδων, ἀφήνει ὑπόλοιπον μίαν δεκάδα, ἥτις μετὰ τῆς μιᾶς μονάδος ἀποτελεῖ τὸν διαιρέτην 11· ὅθεν γίνεται ὁλόκληρος διαιρετὸς διὰ τοῦ 11. Ὁμοίως ὁ τρίτος 100001 διαιρούμενος μέχρι τῶν χιλιάδων ἀφήνει ὑπόλοιπον μίαν χιλιάδα, ἥτις μετὰ τοῦ ἐφεξῆς μέρους ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν 1001 ἀκριβῶς, ὡς δέδεικται, διαιρετὸν διὰ τοῦ 11. Καὶ ὡσαύτως καὶ οἱ ἄλλοι ὅμοιοι δι᾽ ἀναγωγικοῦ συλλογισμοῦ ἀποδεικνύονται διαιρετοὶ διὰ τοῦ 11.

γ΄. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 11, ὅταν ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν χαρακτήρων αὐτοῦ τάξεως ἀρτίας ἀπὸ τὸ τῶν χαρακτήρων τάξεως περιττῆς εἶναι 0 ἢ πολυπλάσιόν τι τοῦ 11. Π. χ. 646789 διαιρεῖται διὰ τοῦ 11 διότι τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων τάξεως περιττῆς $9+7+4$ καὶ τὸ τῶν τῆς ἀρτίας $8+6+6$ δίδουσι διαφορὰν 0.

Ὡσαύτως 659649639 διαιρεῖται διὰ τοῦ 11, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν περιττῶν τάξεων $9+6+4+9+6=34$ καὶ τὸ τῶν ἀρτίων $3+9+6+5=23$ ἔχουσι διαφορὰν 11 τουτέστι $33-22=11$.

Διὰ τὴν γενικὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου ἔστω ἀριθμός τις $A=\varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$, συνιστάμενος ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων.

Κατὰ πρῶτον ὁ ἀριθμὸς οὗτος κατὰ τὰς ἀρχὰς τῆς δεκαδικῆς ἀριθμήσεως, ἀναλύεται ὡς ἑξῆς.

$$A=\alpha+10\beta+10^2\,\gamma+10^3\,\delta+10^4\,\varepsilon.$$

Προσθαφαιροῦντες δὲ τὴν μονάδα εἰς τὰς περιττὰς καὶ ἀρτίας δυνάμεις τοῦ 10 καὶ ἐπαμείβοντες τὰς προξενουμένας αὐξομοιώσεις διὰ τῆς προσθαφαιρέσεως τῶν πολυπλασιαστέων β, γ, δ, κτλ. συνάγομεν.

$$A=\left\{\begin{array}{llll}(10+1)\,\beta+(10^2-1)\,\gamma+(10^3+1)\,\delta+(10^4-1)\,\varepsilon\\ +\alpha-\beta \qquad\qquad +\gamma \qquad\qquad -\delta \qquad\qquad +\varepsilon.\end{array}\right.$$

Ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου τύπου παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι τὰ μέρη $(10+1)\,\beta$, $(10^2-1)\,\gamma$, κτλ, ὄντα πολυπλάσια δυνάμεων τοῦ 10 τῶν μὲν ηὐξημένων, τῶν δὲ ἠλαττωμένων κατὰ μονάδα, εἶναι διαιρετὰ διὰ τοῦ 11, καὶ ἐπομένως τὸ σύνολον αὐτῶν, παριστανόμενον διὰ τοῦ Β, εἶναι ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ τοῦ 11· ἐκ τούτου ἂν καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῶν ἑτέρων ὅρων $\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon$, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Γ, διαιρῆται διὰ τοῦ 11, πρέπει νὰ διαιρῆται καὶ τὸ ὅλον Α· ἄρα ἡ ἀκριβὴς διαίρεσις τοῦ ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ διαιρετὸν ἢ τὸ ἀδιαίρετον τῆς διαφορᾶς $\alpha+\gamma+\varepsilon-(\beta+\delta)$, ὡς ἀπηγγείλαμεν εἰς τὴν πρότασιν.

187. Εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι δυνατὸν οἱ χαρακτῆρες τάξεως ἀρτίας νὰ δώσωσιν ἄθροισμα μεγαλήτερον τοῦ τῶν χαρακτήρων τάξεως περιττῆς, καὶ τότε δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις, ὡς εἰς τὸν ἀριθμὸν 395369784, εἰς τὸν ὁποῖον οἱ μὲν χαρακτῆρες τῶν περιττῶν τάξεων δίδουσιν ἄθροισμα 25, οἱ δὲ τῶν ἀρτίων 29.

Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ἵνα μάθωμεν τὸ διαιρετὸν τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 11, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι, τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἀναλυομένου, ὡς ἀνωτέρω, εἰς δύο μέρη Β καὶ Γ, δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν, ὅτι ἐκ τῶν πολλῶν 11, τῶν περιεχομένων εἰς τὸ πρῶτον μέρος Β, (ἐπειδὴ τὸ Β συνίσταται ἐκ πολυπλασίων τοῦ 11), μεταφέρεται ἅπαξ, ἢ δὶς ὁ 11 ἐκ τοῦ μέρους τούτου εἰς τὸ δεύτερον μέρος Γ, χωρὶς νὰ καταστραφῇ τὸ διαιρετὸν τοῦ μέρους Β διὰ τοῦ 11. Οὕτω δὲ τὸ ἄθροισμα 25 τῶν περιττῶν τάξεων, αὐξανόμενον κατὰ 11, ἀποτελεῖ τὸν 36 ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφαιρεῖται ὁ 29 καὶ δίδει ὑπόλοιπον 7· καὶ τοιοῦτον θέλει εἶσθαι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ, διαιρουμένου διὰ τοῦ 11.

188. Ὑπάρχουσιν ὁμοίως χαρακτηριστικὰ τῆς διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ 7, 13, 17, κτλ. ἀλλὰ τὴν ἔρευναν τούτων παραλείπομεν, καὶ διότι ἡ ἀναζήτησις αὐτῶν ἀπαιτεῖ πολυπλοκωτέρας πράξεις, παρ' ἐὰν ἀμέσως ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν διὰ τῶν τοιούτων διαιρετῶν, καὶ διότι τὰ ζητήματα ταῦτα, ἁπλῆς περιεργείας ἄξια, ἀπαιτοῦσιν ἄλλας περισσοτέρας ἀλγεβρικὰς γνώσεις. Σημειοῦμεν δὲ τὰ ἑξῆς ὡς πρὸς τὴν διαιρετότητα τῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν πολυπλασίων διαιρετῶν, οἷον τοῦ 6, 12, 18, 45, 66, 198 κτλ. τουτέστιν ἀριθμῶν παραγομένων ἐκ τοῦ πολυπλασιασμοῦ τῶν πρώτων 2, 3, 5 καὶ 11.

Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ τοῦ 6, ὅταν ἄρτιος ὤν, ἔχῃ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων αὐτοῦ διαιρετὸν διὰ τοῦ 3.

Ὁμοίως διαιρεῖται διὰ τοῦ 12, ὅταν ἔχῃ ἀμφότερα τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς διαιρετότητος διὰ τοῦ 4 καὶ 3, ἐπειδὴ $12=4\times3$.

Ὁμοίως διαιρεῖται διὰ τοῦ 18 ἢ 45, ὅταν διαιρῆται διὰ τοῦ 2 καὶ 9, ἢ διὰ 5 καὶ 9, κτλ.

§. γ'. Περὶ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας.

189. Ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν διαιρετῶν ἁπλῶν καὶ συνθέτων δεδομένου ἀριθμοῦ, περὶ τῆς ὁποίας ἐνταῦθα διαλαμβάνομεν, εἶναι ζήτημα ὠφελιμώτατον εἰς τὰς ἐφαρμογάς.

Ἔστω ἐν γένει ἀριθμός τις Α, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν ὅλους τοὺς ἁπλοῦς καὶ συνθέτους διαιρέτας.

Ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ 2 παρατηροῦμεν ποῖος ἐκ τῆς σειρᾶς τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7 . . . . διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν δεδομένον Α. Ἔστω δὲ ἐξ αὐτῶν ὁ πρῶτον ἀπαντώμενος ἐλάσσων ὁ α, διὰ τοῦ ὁποίου, ἐξ ὑποθέσεως, ἐκτελοῦμεν διαιρέσεις ἀκριβεῖς μ, μετὰ τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν πηλίκον Α', μὴ διαιρούμενον διὰ τοῦ α. Οὕτως ἔχομεν $Α=α^{μ}\,Α'$.

Ζητοῦμεν ἐφεξῆς ἄλλον τινὰ πρῶτον ἀριθμὸν μετὰ τὸν α, φέρ' εἰπεῖν τὸν β, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν οὐχὶ πλέον τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ Α διὰ τοῦ β, ἀλλὰ τοῦ τελευταίου εὑρεθέντος πηλίκου Α', ἐπειδὴ ὁ β, ὢν πρῶτος πρὸς τὸν α καὶ ἐπομένως πρὸς τὰς δυνάμεις αὐτοῦ $α^{μ}$, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον παράγοντα Α' τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ Α (ἀριθ.

176). Οὕτως ὑποτεθείσθω, ὅτι ὁ β διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν A' πολλάκις καὶ ὅτι μετὰ ν τοιαύτας διαδοχικὰς διαιρέσεις λαμβάνομεν πηλίκον A'', μὴ περιέχον πλέον τὸν β. Ἐκ τούτου ἔχομεν $A'=\beta^{\nu}\,A''$ καὶ ἐπομένως $A=\alpha^{\mu}\,\beta^{\nu}\,A''$.

Παρομοίως ζητοῦμεν ἕτερόν τινα πρῶτον ἀριθμὸν, ἀκριβῆ διαιρέτην τοῦ A'', τὸν γ, καὶ δι᾽ αὐτοῦ διαιροῦμεν τὸν A'', ὁσάκις εἶναι δυνατὸν, οὕτως ἐξ ὑποθέσεως μετὰ π διαιρέσεις λαμβάνομεν πηλίκον τι A''', μὴ περιέχον τὸν γ, ὥστε ἔχομεν $A''=\gamma^{\pi}\,A'''$ καὶ ἐπομένως $A=\alpha^{\mu}\,\beta^{\nu}\,\gamma^{\pi}\,A'''$.

Ἐξακολουθοῦντες ὡσαύτως καὶ τὴν διαίρεσιν τοῦ A''' καὶ τῶν ἐφεξῆς πηλίκων διὰ τῶν ἄλλων πρώτων ἀριθμῶν θέλομεν φθάσει εἰς πηλίκον τι, ἀριθμὸν ἀπολύτως πρῶτον, ὅστις διαιρούμενος δι᾽ ἑαυτοῦ θέλει δώσει τὴν μονάδα. Ὅθεν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ἀναλύεται οὕτως εἰς τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας α, β, γ, δ. . . . . .κτλ.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 5880, τὸν ὁποῖον πρόκειται νὰ ἀναλύσωμεν εἰς τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας.

Διαιροῦντες κατὰ πρῶτον διὰ τοῦ 2 λαμβάνομεν πηλίκον 2940, ὑποδιαιροῦντες λαμβάνομεν 1470 καὶ διαιροῦντες καὶ ἐκ τρίτου λαμβάνομεν 735 ἀριθμὸν μὴ διαιρούμενον διὰ τοῦ 2. Διαιροῦντες ἐφεξῆς 735 διὰ τοῦ 3 εὑρίσκομεν ἀκέραιον πηλίκον 245, μὴ περιέχον πλέον τὸν παράγοντα 3. Ὁμοίως διαιροῦμεν τὸν 245 διὰ 5 καὶ εὑρίσκομεν νέον πηλίκον 49. Καὶ τέλος διαιροῦντες διὰ τοῦ 7 δὶς κατὰ διαδοχὴν εὑρίσκομεν τελευταῖον πηλίκον τὴν μονάδα.

5880	1
2940	2
1470	2
735	2
245	3
49	5
7	7
1	7

Ὅθεν ἔχομεν $5880=2^3.\ 3.\ 5.\ 7^2$.

190. Ἵνα εὕρωμεν ἤδη ὅλους τοὺς συνθέτους παράγοντας συνδυάζομεν διὰ πολυπλασιασμοῦ τοὺς εὑρεθέντας τούτους ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρεῖς κτλ. κατὰ τὴν ἑξῆς τάξιν.

Γράφομεν κατὰ πρῶτον εἰς τὴν αὐτὴν γραμμὴν τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς 1, 2, 4, 8.

Πολυπλασιάζομεν ὅλους αὐτοὺς ἐπὶ τὸν ἑξῆς παράγοντα 3, καὶ γράφομεν τὰ πολυπλάσια ταῦτα 3, 6, 12, 24 ὑπὸ τοὺς πρώτους.

Ὁμοίως πολυπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἑξῆς παράγοντα 5 καὶ γράφομεν τὰ πενταπλάσια εἰς τὸν τρίτον καὶ τέταρτον στίχον.

Προχωροῦντες εἰς τὸν ἐφεξῆς παράγοντα 7 πολυπλασιάζομεν ἐπ᾽ αὐτὸν τοὺς τέσσσαρας προηγουμένους στίχους καὶ λαμβάνομεν τέσσαρας νέους στίχους.

Τέλος πολυπλασιάζομεν μόνον τοὺς τέσσαρας δευτέρους στίχους ἐπὶ τὸν δεύτερον παράγοντα 7· καὶ οὕτω λαμβάνομεν καὶ τοὺς τέσσαρας τελευταίους ὡς δείκνυται εἰς τὸν πίνακα.

1,	2,	4,	$8=2^3$
3,	6,	12,	$24=2^3.\ 3$
5,	10,	20,	40
15,	30,	60,	$120=2^3\ 3.\ 5$
7,	14,	28,	56
21,	42,	84,	168
35,	70,	140,	280
105,	210,	420,	$840=2^3.\ 3.\ 5.\ 7$
49,	98,	196,	392
147,	294,	588,	1176
245,	490,	980,	1960
735,	1470,	2940,	$5880=2^3.\ 3.\ 5.\ 7^2.$

Κατὰ τὴν μηχανικὴν ταύτην διάταξιν, ἐν ᾧ σπανίως συμβαίνει νὰ παραλείψωμεν παράγοντα, εὐκολυνόμεθα πρὸς τούτοις εἰς τὴν ἐπαρίθμησιν αὐτῶν. Ἐπειδὴ 12 στίχοι ἕκαστος ἐκ τεσσάρων ἀριθμῶν ἀποτελοῦσι τοὺς 48 ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ ἀκριβεῖς διαιρέται τοῦ δεδομένου 5580.

Διὰ τὴν εὐχερεστέραν κατασκευὴν τοῦ πίνακος συμφέρει νὰ γράψωμεν εἰς τὸν πρῶτον στίχον τὰς δυνάμεις ἐκείνου τοῦ πρώτου παράγοντος, ὅστις εἰσέρχεται πλέον τῶν ἄλλων, ὡς ἐνταῦθα ὑπάρχει ὁ παράγων 2.

Εὑρίσκομεν παρομοίως, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 1764, 1665, 5670, 30527 ἀναλύονται εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας.

$2^2.\ 3^2.\ 7^2,\ 3^2.\ 5.\ 37,\ 2.\ 3^4.\ 5.\ 7,\ 7^3.\ 89.$

191. Ἅμα ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ πόσοι εἶναι ὅλοι οἱ διάφοροι ἀκριβεῖς διαιρέται αὐτοῦ ἁπλοῖ τε καὶ σύνθετοι, καὶ πρὶν ἔτι κατασκευάσωμεν τὸν πίνακα αὐτῶν κατὰ τὴν ἀνωτέρω μέθοδον.

Τῷ ὄντι ἔστω ἡ γενικὴ ἔκφρασις $A=\alpha^\mu\ \beta^\nu\ \gamma^\pi\ \delta^\rho$.

Κατὰ πρῶτον ἔχομεν τοὺς διαιρέτας $1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^\mu$, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς εἶναι $\mu+1$.

Πολυπλασιάζοντες τὴν σειρὰν ταύτην τῶν διαιρετῶν ἐπὶ τοὺς $\beta,\ \beta^2,\ \beta^3,\ \beta^\nu$, ὄντας τὸν ἀριθμὸν ν θέλομεν λάβει $(\mu+1)\nu$ διαιρέτας συνθέτους ἐκ τῶν δυνάμεων τοῦ α καὶ β, ἐν οἷς καὶ τὰς δυνάμεις τοῦ β. Εἰς τούτους προσθέτοντες καὶ τοὺς προευρεθέντας εὑρίσκομεν ὅλους $(\mu+1)+\mu+1$ τουτέστι $(\mu+1)\ (\nu+1)$· καὶ τοσοῦτοι εἶναι οἱ παραγόμενοι καθ' ὅλους τοὺς συνδυασμοὺς τῶν δυνάμεων τοῦ α καὶ β καθ' ἑαυτοὺς καὶ συναλλήλως ἐμπεριλαμβανομένης καὶ τῆς μονάδος.

Πολυπλασιάζοντες παρομοίως ὅλους αὐτοὺς ἐπὶ τοὺς ἑξῆς $\gamma,\ \gamma^2\ \gamma^3$....

γπ, τουτέστιν ἐπὶ π νέους λαμβάνομεν $(\mu+1)(\nu+1)$ συνθέτους, προσθέτοντες δὲ καὶ τοὺς προευρεθέντας $(\mu+1)(\nu+1)$ λαμβάνομεν ὅλους $(\mu+1)(\nu+1)\pi+(\mu+1)(\nu+1)$, τουτέςι $(\mu+1)(\nu+1)(\pi+1)$ καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς συνδυασμοὺς τῶν δυνάμεων τῶν α, β καὶ γ, ἐμπεριλαμβανομένης καὶ τῆς μονάδος.

Σκεπτόμενοι παρομοίως καὶ ἐπὶ τοῦ τετάρτου παράγοντος δ εὑρίσκομεν, ὅτι $(\mu+1)(\nu+1)(\pi+1)(\rho+1)$ εἶναι ὁ τύπος ὅστις ἐκφράζει ὅλους τοὺς συνδυασμοὺς τῶν δυνάμεων τῶν πρώτων παραγόντων α, β, γ, δ, τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, τουτέστιν ὅλους τοὺς ἁπλοῦς καὶ συνθέτους διαφόρους διαιρέτας αὐτοῦ.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών. Ἵνα εὕρωμεν ὅλους τοὺς διαφόρους διαιρέτας τοῦ ἀριθμοῦ, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας, αὐξάνομεν κατὰ μονάδα τοὺς ἐκθέτας τῶν διαφόρων ἁπλῶν παραγόντων, καὶ οὕτως ἐπηυξημένους πολυπλασιάζομεν αὐτοὺς συναλλήλως. Οὕτω τὸ προκύπτον γινόμενον ἐκφράζει ὅλους τοὺς διαφόρους ἀκριβεῖς διαιρέτας ἁπλοῦς τε καὶ συνθέτους τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ἐν οἷς ἐμπεριλαμβάνεται καὶ ἡ μονὰς καὶ αὐτὸς ὁ προταθείς.

Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εὕρομεν $5880=2^3.\ 3.\ 5.\ 7^2$. ὅθεν πρέπει νὰ ἔχωμεν διαφόρους διαιρέτας $(3+1)(1+1)(1+1)(2+1)=4\times2\times2\times3=48$, ὅσους καὶ εὕρομεν πραγματικῶς.

192. Ἐπειδὴ ἐκ πρώτης ὄψεως μὴ δυνάμενοι νὰ κρίνωμεν ἂν ἀριθμός τις ἦναι πρῶτος, ἀποπειρώμεθα τὴν διαίρεσιν αὐτοῦ διὰ τῆς σειρᾶς τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7, 11 κτλ. ἡ δὲ ἀναζήτησις αὕτη προβαίνει ἐπὶ μακρὸν, δυνάμεθα νὰ συντέμνωμεν πολὺ τὴν ἐργασίαν διὰ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

Ἀριθμὸς, ὅςις μέχρι τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης δὲν εὗρεν ἀκριβῆ διαιρέτην, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ οὔτε ἀνώτερον αὐτῆς· καὶ ἐπομένως εἶναι πρῶτος.

Π. χ. ὁ 73 ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν ὡς ἔγγιστα 8.

Ἐπειδὴ ἐκ τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῶν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ 8, τουτέςιν ὁ 2, 3, 5, 7 δὲν εἶναί τις, διαιρῶν ἀκριβῶς τὸν 73, διὰ τοῦτο καὶ οἱ ἀνώτεροι τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, τουτέστιν ὁ 11, 15, 17 κτλ. δὲν διαιροῦσι τὸν 73· ὥςε χωρὶς νὰ ἀποπειραθῶμεν ἐπὶ ματαίῳ λέγομεν ὅτι ὁ 73 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως ταύτης, ἔστω ἀριθμός τις Α, γινόμενον τῶν παραγόντων Β καὶ Γ, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι Ρ ὥστε ἔχομεν $A=B\times\Gamma=P\times P$.

Διαιροῦντες ἑκάτερον μέλος τῆς ἰσότητος διὰ $B\times P$ καὶ ἐξαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας εἰς μὲν τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου μέλους τὸν Β εἰς δὲ τοὺς τοῦ δευτέρου τὸν Ρ συνάγομεν

$$\frac{\text{Β}\times\text{Γ}}{\text{Β}\times\text{Ρ}}=\frac{\text{Ρ}\times\text{Ρ}}{\text{Β}\times\text{Ρ}}, \text{ ἤτοι } \frac{\text{Γ}}{\text{Ρ}}=\frac{\text{Ρ}}{\text{Β}}.$$

Ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου τύπου ἕπεται, ὅτι ἂν ὁ κλασματικὸς $\frac{\text{Γ}}{\text{Ρ}}$ ἦναι ἐλάσσων τῆς μονάδος καὶ ἐπομένως $\text{Γ}<\text{Ρ}$, πρέπει καὶ ὁ ἰσοδύναμος αὐτῷ $\frac{\text{Ρ}}{\text{Β}}$ νὰ ἦναι ἐλάσσων τῆς μονάδος καὶ ἐπομένως $\text{Β}>\text{Ρ}$· ἂν δὲ $\frac{\text{Γ}}{\text{Ρ}}$ ἦναι ἀνώτερος τῆς μονάδος καὶ ἐπομένως $\text{Γ}>\text{Ρ}$, πρέπει ὡσαύτως καὶ ὁ $\frac{\text{Ρ}}{\text{Β}}$ νὰ ἦναι ἀνώτερος τῆς μονάδος καὶ ἐπομένως $\text{Ρ}>\text{Β}$ ἢ $\text{Β}<\text{Ρ}$, τουτέστι κατ' ἀμφοτέρας τὰς ὑποθέσεις ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐκ τῶν δύο παραγόντων Β καὶ Γ τοῦ γινομένου Α, ὁ μὲν εἶναι ἐλάσσων, ὁ δὲ μείζων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

Τούτου τεθέντος, ἂν δεδομένου τινὸς ἀριθμοῦ, ὡς τοῦ 73, δὲν εὕρωμεν διαιρέτην ἀκριβῆ μέχρι τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, τουτέστι δὲν εὕρωμεν τὸν παράγοντα, τὸν μικρότερον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, φανερὸν ὅτι δὲν πρέπει νὰ ζητήσωμεν, οὔτε τὸν μεγαλήτερον αὐτῆς, ὡς μὴ ὑπάρχοντός τινος τοιούτου, ἄνευ μικροτέρου.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ὁ 113 βασανιζόμενος μέχρι τοῦ 11, ὁ 719 μέχρι τοῦ 23, ὁ 977 μέχρι τοῦ 31, ὁ 3329 μέχρι τοῦ 53 κτλ. ἀποδεικνύονται πρῶτοι.

§. δ'. Ἐφαρμογαὶ τῆς διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν.

193. Α'. *Σχηματισμὸς πίνακος τῶν πρώτων ἀριθμῶν.* Ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν πρώτων ἀριθμῶν, τῶν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τινὸς ὁρίου, φερ' εἰπεῖν τοῦ 1000 ἢ 10000, εἶναι ζήτημα σπουδαῖον εἰς τὴν Μαθηματικήν. Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τῶν ἀρχαίων χρόνων ὁ Ἐρατοσθένης, ἀναχωρῶν ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἐκτεθείσας ἀρχάς, ἔδωκε τὴν ἑξῆς ἁπλουστέραν μέθοδον, ἡ ὁποία φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους. Ὑποθέτομεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1000 πρώτους ἀριθμούς· γράφομεν αὐτοὺς πρῶτον κατὰ σειράν, καὶ ἀρχόμενοι

μετὰ ταῦτα ἀπὸ τοῦ 4 (τετραγώνου τοῦ 2) διαγράφομεν ἐναλλάξ, ἀνὰ ἕκαςον δεύτερον, ὅλους τοὺς ἀρτίους, οἷον τὸν 4, 6, 8, 10 κτλ.

Ἐφεξῆς ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ 9 (τετραγώνου τοῦ 3) διαγράφομεν τὸν ἑπόμενον μετὰ δύο, ἤτοι ἀνὰ ἕκαστον τρίτον, καὶ οὕτως ἐξαλείφομεν ὅλους τοὺς τριπλασίους, ὅσους δὲν διέγραψεν ὁ 2, οἷον τὸν 9, 15, 21 κτλ.

Ὡσαύτως ἀναχωροῦντες ἀπὸ τοῦ 25 (τετραγώνου τοῦ 5) ἐξαλείφομεν ἀνὰ ἕκαστον πέμπτον, ἤτοι ἕνα μετὰ τέσσαρας, καὶ οὕτω διαγράφομεν ὅλους τοὺς πενταπλασίους, ὅσους δὲν διέγραψαν ὁ 2 καὶ 3, οἷον τὸν 25, 35, 55, 65 κτλ.

Παρομοίως ἀναχωροῦντες ἀπὸ τοῦ 49, τετραγώνου τοῦ 7, διαγράφομεν ἀνὰ ἕκαστον ἕβδομον. Καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ 121, τετραγώνου τοῦ 11, διαγράφομεν ἀνὰ ἕκαςον δέκατον πρῶτον καὶ προχωροῦμεν ὁμοίως μέχρι τοῦ 961, τετραγώνου τοῦ 31 καὶ μὴ περαιτέρω· ἐπειδὴ ὁ ἀμέσως ἑπόμενος πρῶτος 37 εἶναι ἀνώτερος τῆς τεραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 1000 καὶ ὡς ἐκ τούτου τὰ πολυπλάσια αὐτοῦ ἐπὶ παράγοντας μικροτέρους τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἤτοι τὰ ἀπὸ τοῦ 1 ἕως τοῦ 1000 ἐξηλείφθησαν διὰ τῶν προλαβόντων διαιρετῶν 2, 3, 5, 7, κτλ. Οὕτω διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 1000 διὰ τῶν ἀνωτέρω διαγραφῶν ἐκτελοῦμεν μόνον ἕνδεκα διαιρέσεις διὰ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.

194. Β'. *Βάσανος τοῦ πολυπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 9 καὶ 11.*—Αἱ εἰς τοὺς ἀριθ. 175 καὶ 186 ἀποδειχθεῖσαι ἀρχαὶ τῆς διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ 9 καὶ τοῦ 11 δίδουσι τὴν ἑξῆς συντομωτέραν μέθοδον διὰ τὴν βάσανον τοῦ γινομένου, ἢ τοῦ πηλίκου.

Προσθέτομεν τοὺς χαρακτῆρας τοῦ πολυπλασιαστέου καὶ ὡσαύτως τοὺς τοῦ πολυπλασιαστοῦ, καὶ τὰ ἀθροίσματα αὐτῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 9, ἢ μᾶλλον, καθόσον ἡ ἀφαίρεσις λαμβάνει χώραν, ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς τὸ 9, τὰ δὲ ὑπόλοιπα, τὰ ὁποῖα εἶναι καὶ ὑπόλοιπα τῶν ὅλων ἀριθμῶν, γράφομεν εἰς τὰς δύο πρὸς ἀριστερὰν ὀρθὰς γωνίας δύο καθέτων γραμμῶν.

Πολυπλασιάζομεν τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 9, τὸ δὲ λαμβανόμενον ὑπόλοιπον γράφομεν εἰς τὴν πρώτην πρὸς τὰ δεξιὰ γωνίαν.

Τέλος προσθέτομεν καὶ τοὺς χαρακτῆρας τοῦ γινομένου καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 9, ἢ μᾶλλον ἀποβάλλομεν διαδοχικῶς τὸν 9, καθόσον ἡ ἀφαίρεσις αὕτη ἔχει χώραν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον γράφομεν εἰς τὴν τετάρτην γωνίαν. Οὕτω δὲ, ἂν ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἀκριβὴς, πρέπει τὸ τελευταῖον τοῦτο ὑπόλοιπον νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου τοῦ προευρεθέντος ὑπολοίπου τοῦ πολυπλασιαστέου ἐπὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ πολυπλασιαστοῦ.

Π. χ. εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν χαρακτήρων τοῦ πολυπλασιαςέου εἶναι 8.

Τὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν χαρακτήρων τοῦ πολυπλασιαστοῦ εἶναι 7.

Τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου 56 τῶν δύο ὑπολοίπων 7 καὶ 8 εἶναι 2.

Καὶ τέλος τὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν χαρακτήρων τοῦ γινομένου εἶναι ὡσαύτως 2.

$$\begin{array}{r} 5786 \\ 475 \\ \hline 28930 \\ 40502 \\ 23144 \\ \hline 2748350 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 8 & 2 \\ \hline 7 & 2 \end{array}$$

Ἡ οὕτω παραγομένη ἰσότης τῶν δύο τελευταίων ὑπολοίπων, θεωρεῖται διὰ τὸν πολυπλασιασμὸν ὡς τεκμήριον ἀκριβείας.

Διὰ τὴν γενικὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως ταύτης παριστάνομεν τοὺς δύο παράγοντας γινομένου τινὸς Γ διὰ τοῦ Α καὶ Β· καὶ τὰ πηλίκα τῆς διὰ τοῦ 9 διαιρέσεως διὰ τοῦ Π καὶ Π′, τὰ δὲ ὑπόλοιπα διὰ τοῦ Υ καὶ Υ′· ὥστε ἔχομεν.

$$\text{Α}=9\,\text{Π}+\text{Υ} \text{ καὶ } \text{Β}=9\,\text{Π}'+\text{Υ}'$$

πολυπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας ταύτας μέλος πρὸς μέλος συνάγομεν $\text{ΑΒ}=9^2\,\text{ΠΠ}'+9\,\text{Π}'\text{Υ}+9\,\text{ΠΥ}'+\text{ΥΥ}'$.

Καὶ διαιροῦντες ἑκάτερον μέλος διὰ τοῦ 9, καὶ ἐξαλείφοντες ἐκ τῶν τριῶν πρώτων ὅρων τοῦ δευτέρου μέρους τὸν κοινὸν παράγοντα 9 συνάγομεν $\dfrac{\text{ΑΒ}}{9}=9\,\text{ΠΠ}'+\text{Π}'\text{Υ}+\text{ΠΥ}'+\dfrac{\text{ΥΥ}'}{9}$.

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος ἕπεται ὅτι ἂν ΥΥ′ διαιρῆται διὰ τοῦ 9, πρέπει καὶ τὸ γινόμενον ΑΒ νὰ διαιρῆται ὡσαύτως, καὶ ὁποῖον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ΥΥ′ διὰ 9, τοιοῦτον πρέπει νὰ ἦναι καὶ τὸ τοῦ γινομένου ΑΒ.

Τούτου τεθέντος, κατὰ τὴν ἀνωτέρω βάσανον τοῦ πολυπλασιασμοῦ ἡ διὰ τοῦ 9 διαίρεσις τῶν ἀθροισμάτων τῶν χαρακτήρων τοῦ πολυπλασιαστέου καὶ τῶν τοῦ πολυπλασιαστοῦ ὡς ἐπίσης καὶ τῶν τοῦ γινομένου εἶναι ἀντὶ τῆς διαιρέσεως τῶν ὅλων ἀριθμῶν συντομώτερον μέσον τῆς εὑρέσεως τῶν ὑπολοίπων τῶν δύο παραγόντων Α καὶ Β καὶ τοῦ γινομένου αὐτῶν Γ, διαιρουμένων διὰ τοῦ 9.

Ὁ αὐτὸς κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ ὡς πρὸς τὴν βάσανον τῆς διαιρέσεως. Διότι ὁ διαιρετέος θεωρεῖται ὡς γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου.

ὅθεν προσθέτομεν τοὺς χαρακτῆρας τοῦ διαιρέτου καὶ διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διὰ τοῦ 9 λαμβάνομεν τὸ ὑπόλοιπον. Διαιροῦντες ὡσαύτως καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν χαρακτήρων τοῦ πηλίκου λαμβάνομεν τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον. Πολυπλασιάζομεν τὰ δύο ὑπόλοιπα καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 9, καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸ τρίτον ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν χαρακτήρων τοῦ διαιρετέου διαιρουμένου διὰ τοῦ 9.

Ἂν δὲ ὁ διαιρετέος δὲν ἦναι τέλειον γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου, καὶ ἑπομένως ὑπάρχῃ ὑπόλοιπόν τι, ἀφαιροῦμεν πρῶτον τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἀπὸ τοῦ διαιρέτου καὶ μετὰ ταῦτα ἐκτελοῦμεν τὴν βάσανον, ὡς ἀνωτέρω.

Ἡ ἐκτεθεῖσα βάσανος ἀποδεικνύει μὲν τὴν ἀκρίβειαν τοῦ γινομένου, ἢ τοῦ πηλίκου, ὁσάκις ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἀκριβής, ἀλλὰ δὲν ἀποκλείει καὶ πολλὰς περιστάσεις, κατὰ τὰς ὁποίας μεγάλα λάθη δὲν δύνανται νὰ διακριθῶσιν, ὡς φερ' εἰπεῖν ἡ ἴση αὐξομείωσις δύο χαρακτήρων, ἡ παράλειψις τοῦ 0 ἢ τοῦ 9, ἡ μετάθεσις τινὸς χαρακτῆρος κτλ. Διότι καθ' ὅλας τὰς περιστάσεις ταύτας δὲν διαταράσσεται ἡ ἰσότης τῶν ὑπολοίπων. Διὰ τοῦτο ἡ μέθοδος αὐτη, ἂν καὶ πρόχειρος, δὲν πρέπει νὰ προτιμᾶται, εἰμὴ ὁσάκις ὁ χρόνος κατεπείγει.

195. Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἀποδεικνύομεν καὶ τὴν βάσανον διὰ τοῦ 11, μὴ διαφέρουσαν τῆς ἀνωτέρω διὰ τοῦ 9, εἰμὴ κατὰ τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως τῶν ὑπολοίπων (ἀριθ. 186). Ἡ δευτέρα δὲ αὐτη εἶναι πολὺ προτιμοτέρα τῆς πρώτης, καθότι πολλαὶ περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας διὰ τῆς πρώτης δὲν δύνανται νὰ διακριθῶσι τὰ λάθη, δὲν ἔχουσιν ὁμοίως χώραν καὶ εἰς τὴν δευτέραν.

Σημειοῦμεν τελευταῖον, ὅτι ἀμφοτέρας τὰς βασάνους ταύτας δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπίσης καὶ εἰς τὸν πολυπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων. Ἐπειδὴ αἱ πράξεις αὗται δὲν διαφέρουσι ποσῶς ἀπὸ τὰς ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

196. Γ'. *Ἀναγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.*— Ὁ ἀποδοθεὶς κανὼν (ἀριθ. 85) τῆς ἀγωγῆς τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν, ἐν ᾧ δίδει χώραν συχνάκις εἰς κλάσματα ἐκφραζόμενα διὰ μεγάλων ὅρων, ἐξ ἑτέρου καθιστᾷ καὶ τὴν ἐργασίαν ἐπίπονον. Ἐνταῦθα ἐρχόμεθα νὰ δείξωμεν, ὅτι ὅταν οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων ἔχωσι κοινοὺς παράγοντας, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς κοινὸν παρονομαστὴν, ἀριθμὸν πολὺ μικρότερον τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν τῶν δεδομένων κλασμάτων. Αἱ μερικαὶ δὲ περιστάσεις, τὰς ὁποίας ἐθεωρήσαμεν εἰς τὸν ἀριθ. 86 καὶ 87 εἶναι μερικὴ συνέπεια τῆς παρούσης ἀνα-

πτύξεως. Ἰδοὺ ὁ κανὼν, διὰ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν τὸν ἁπλούστερον κοινὸν παρονομαστήν. Ἀναλύομεν τοὺς παρονομαστὰς τῶν δεδομένων κλασμάτων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, σχηματίζομεν ἐπομένως τὸ γινόμενον τῶν διαφόρων πρώτων παραγόντων λαμβανομένων κατὰ τὴν ὑψηλοτέραν δύναμιν, κατὰ τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ἕκαστος εἰς ἕνα τῶν παρονομαστῶν· καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ὁ ἁπλούστερος κοινὸς παρονομαστὴς τῶν ἰσοδυνάμων ὁμοειδῶν.

Ἵνα εὕρωμεν δὲ τοὺς νέους ἀριθμητὰς, διαιροῦμεν τὸν κοινὸν παρονομαστὴν δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ τῶν δεδομένων κλασμάτων καὶ ἐπὶ τὸ ἀναφορικὸν πηλίκον ἑκάστου πολυπλασιάζομεν τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμητὰς τῶν δεδομένων κλασμάτων.

Ἐπειδὴ πρῶτον ὁ οὕτω σχηματιζόμενος κοινὸς παρονομαστὴς, περιέχων τὰς ὑψηλοτέρας δυνάμεις ἑκάστου τῶν πρώτων ἀριθμῶν, τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς τοὺς παρονομαστὰς τῶν κλασμάτων, εἶναι διὰ τοῦτο πολυπλάσιος ἑκάστου παρονομαστοῦ· δεύτερον δὲ εἶναι καὶ ὁ ἁπλούστερος, ἐπειδὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ παραλειφθῇ τις τῶν ληφθέντων παραγόντων· ἄλλως δὲ καθίσταται ἀδύνατος ἡ διαίρεσις αὐτοῦ δι' ἐκείνου τοῦ παρονομαστοῦ, τοῦ ὁποίου παρελείφθη ὁ παράγων.

Ἔστωσαν π. χ. τὰ κλάσματα

$$\frac{13}{60},\ \frac{17}{28},\ \frac{23}{240},\ \frac{173}{225},\ \frac{319}{490},\ \frac{523}{720}.$$

τὰ ὁποῖα πρόκειται νὰ τρέψωμεν εἰς τὰ ἁπλούστερα ὁμοειδῆ.

Ἀναλύοντες κατὰ πρῶτον τοὺς παρονομαστὰς αὐτῶν εἰς τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας εὑρίσκομεν τὰς ἰσοδυνάμους ἐκφράσεις·

$2^2.\ 3.\ 5.\ |\ 2^2.\ 7,\ |\ 2^4.\ 3.\ 5\ |\ 3^2.\ 5^2\ |\ 2.\ 5.\ 7^2\ |\ 2^4.\ 3^2.\ 5.$ Ὅθεν λαμβάνομεν τὰς ὑψηλοτέρας δυνάμεις τῶν διαφόρων πρώτων παραγόντων, τουτέστι 2^4, 3^2, 5^2, 7^2, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον 176400, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἁπλούστερον πολυπλάσιον ὅλων τῶν παρονομαστῶν καὶ ἐπομένως ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν ζητουμένων ὁμοειδῶν.

Ἵνα εὕρωμεν δὲ τοὺς ἀριθμητὰς, διαιροῦμεν τὸ πολυπλάσιον τοῦτο δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν καὶ ἐπὶ τὰ πηλίκα ταῦτα πολυπλασιάζομεν τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμητάς.

Οὕτω 176400 διὰ τοῦ 60 δίδει πηλίκον 2940, ἐπὶ τὸ ὁποῖον πολυπλασιάζεται ὁ ἀριθμητὴς 13 καὶ παράγει γινόμενον 38220, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ζητουμένου ὁμοειδοῦς.

Ὁμοίως 176400 διὰ τοῦ 28 δίδει 6300, τὸ ὁποῖον ἐπὶ 17 παράγει 107100 ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου κτλ.

Οὕτω συνάγομεν τὰ ὁμοειδῆ

$$\frac{38220}{176400},\ \frac{107100}{176400},\ \frac{16905}{176400},\ \frac{135632}{176400},\ \frac{114840}{176400},\ \frac{128135}{176400}.$$

Αἱ πράξεις αὗται φαίνονται μὲν πολύπλοκοι, ἀλλὰ κατὰ τὸν κανόνα, (ἀριθ. 85) ὑποχρεούμεθα εἰς ἔτι πολυπλοκωτέρας καὶ τέλος λαμβάνομεν παρονομαστὴν 32006016000000 καὶ ἀναλόγως ἀριθμητάς, ἀριθμοὺς ἀσυγκρίτως μεγαλητέρους τῶν ἀνωτέρω εὑρεθέντων ὅρων.

Εὑρίσκομεν παρομοίως, ὅτι τὰ κλάσματα

$\frac{13}{20}$, $\frac{17}{48}$, $\frac{113}{280}$, $\frac{527}{960}$, $\frac{1211}{1800}$, $\frac{3613}{5040}$, $\frac{8237}{6860}$,

ἔχουσιν ἁπλούστατον κοινὸν παρονομαστὴν $2^6 . 3^2 . 5^2 . 7^3 = 4939200$.

197. Δ΄. *Παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.* — Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμός, ἀναλυόμενος εἰς τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλους διαιρέτας (ἀριθ. 180), εἰμὴ αὐτοὺς τοὺς πρώτους παράγοντας καὶ τὰ γινόμενα αὐτῶν συνδυαζομένων ἀνὰ δύο, τρεῖς κτλ. ἕπεται ἄρα, ὅτι δύο ἀριθμοὶ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινοὺς διαιρέτας, εἰμὴ τοὺς κοινοὺς ἐκ τῶν πρώτων παραγόντων καὶ τὰ γινόμενα αὐτῶν, τουτέστιν ὁ μ. κ. δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν πρώτων παραγόντων, λαμβανομένου ἑκάστου εἰς τὴν μικροτέραν δύναμιν, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται εἰς ἕνα τῶν προτιθεμένων ἀριθμῶν.

Ἡ ἰδιότης αὕτη δίδει ἤδη νέον μέσον τοῦ εὑρίσκειν τὸν μ. κ. δ, συνάμα δὲ καὶ τοὺς ἁπλουστέρους ὅρους.

Ἔστωσαν ἐν γένει οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β· ἀναλύοντες αὐτοὺς κατὰ πρῶτον εἰς τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας λαμβάνομεν τοὺς κοινοὺς ἐξ αὐτῶν εἰς τὴν μικροτέραν δύναμιν, καθ᾽ ἣν ἀπαντῶνται εἰς τὸν ἕνα. Πολυπλασιάζοντες δὲ αὐτοὺς συναλλήλως εὑρίσκομεν διὰ γινόμενον ἀριθμὸν διαιροῦντα ἀκριβῶς ἑκάτερον τῶν δεδομένων.

Π. χ. ζητοῦμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 2150 καὶ 3612.

$$\begin{array}{r|l} 2150 & 1 \\ 1075 & 2 \\ 215 & 5 \\ 43 & 5 \\ 1 & 43 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3612 & 1 \\ 1806 & 2 \\ 903 & 2 \\ 301 & 3 \\ 43 & 7 \\ 1 & 4 \end{array} \qquad 2 \times 43 = 86.$$

Εὑρίσκομεν ἁπλοῦς διαιρέτας τοῦ μὲν 2150, τοὺς 2, 5, 5, 43 τοῦ δὲ 3612 τοὺς . . . . 2, 2, 3, 7, 43.

Ὅθεν 2×43, ἤτοι ὁ 86 εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ.

Βλέπομεν περιπλέον, ὅτι $5 \times 5 = 25$ καὶ $2 \times 3 \times 7 = 42$ εἶναι τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τῶν 2150 καὶ 3612 διὰ τοῦ 86, εἴτ᾽ οὖν οἱ ζητούμενοι ἁπλούστεροι ὅροι.

198. Ἐπὶ τῆς μεθόδου ταύτης δυνάμεθα νὰ φέρωμεν καὶ τὴν ἑξῆς τροποποίησιν.

Ἐπειδὴ ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν συντίθεται ἐξ ὅλων τῶν κοινῶν πρώτων παραγόντων, δυνάμεθα διὰ τοῦτο νὰ ἐξαλείψωμεν ἀπὸ ἕνα τῶν δεδομένων ἀριθμῶν παράγοντά τινα μὴ ἐμπεριλαμβανόμενον εἰς τὸν ἕτερον, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὴν δύναμιν τοῦ μ. κ. δ.

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 754 καὶ 249.

Ἐξαλείφοντες ἀπὸ τοῦ πρώτου τὸν παράγοντα 2, μὴ ἐμπεριεχόμενον εἰς τὸν 249, λαμβάνομεν 377,

754	249
377	83

Παρομοίως ἐξαλείφοντες τὸν παράγοντα 3 τοῦ δευτέρου 249, μὴ ἐμπεριεχόμενον εἰς τὸν πρῶτον, λαμβάνομεν 83.

Οὕτως ὁ μεταξὺ τοῦ 377 καὶ 83 μ. κ. δ. εἶναι ὁ αὐτὸς, ὁποῖος καὶ μεταξὺ τοῦ 754 καὶ 249· καὶ ἐπειδὴ ὁ 83 εἶναι πρῶτος καθ' ἑαυτὸν καὶ πρὸς τὸν 377· ἄρα δὲν ὑπάρχει μ. κ. δ. μεταξὺ τοῦ 377 καὶ 83 καὶ ἑπομένως μεταξὺ τοῦ 754 καὶ 249.

199. Συχνάκις λαμβάνομεν χρείαν νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. μεταξὺ τριῶν ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ.

Ἀκολουθοῦντες ἁπλῶς τὸν κανόνα (ἀριθ. 94) πρέπει νὰ ζητήσωμεν τὸν μ. κ. δ. μεταξὺ τοῦ Α καὶ Β, ὅστις ἔστω Π· μετὰ ταῦτα τὸν μ. κ. δ. μεταξὺ τοῦ εὑρεθέντος Π καὶ τοῦ τρίτου ἀριθμοῦ Γ. Ἔσω δὲ ὁ τοιοῦτος Ρ. Ἐφεξῆς τὸν μεταξὺ τοῦ εὑρεθέντος τούτου Ρ καὶ τοῦ τετάρτου ἀριθμοῦ Δ· ὁ τελευταῖος δὲ οὗτος Σ θέλει εἶσθαι ὁ μ. κ. δ. τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ.

Ἐπειδὴ ὁ Σ, διαιρῶν τὸν Ρ, ἤτοι τὸν μ. κ. δ, τοῦ Π καὶ Γ, διαιρεῖ ἑκάτερον τούτων (ἀριθ. 175), ὥστε εἶναι διαιρέτης τοῦ Π, Γ, καὶ Δ. Παρομοίως διαιρῶν τὸν Π ἤτοι τὸν μ. κ. δ. τοῦ Α καὶ Β, διαιρεῖ ἑκάτερον τούτων· ὥστε εἶναι ἀκριβὴς διαιρέτης τῶν Α, Β. Γ, Δ. Εἶναι δὲ ὁ μέγιστος· διότι πᾶς ἄλλος μείζων αὐτοῦ δὲν δύναται νὰ διαιρέσῃ τὸν τέταρτον ἀριθμὸν Δ.

Ἀλλ' εἶναι πολὺ εὐκολώτερον νὰ ἀναλύσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς τοὺς ἁπλοῦς αὐτῶν παράγοντας, ἐξ ὧν νὰ λάβωμεν τοὺς κοινοὺς καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν θέλει εἶσθαι ὁ μ. κ. δ. Διότι πᾶς ἀκριβὴς διαιρέτης πρέπει νὰ συνίσταται ἐκ πρώτων παραγόντων, οἱ ὁποῖοι νὰ ἐμπεριέχωνται καὶ εἰς τὸν διαιρετέον· καθὸ δὲ κοινὸς πρέπει νὰ ἐμπεριέχῃ τοὺς ἀπαντωμένους εἰς ἕκαστον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, καὶ καθὸ μέγιστος, πρέπει νὰ συγκροτῆται ἐξ ὅλων τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν προκειμένων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 504, 756, 1260 καὶ 2058· ἀναλύοντες αὐτοὺς κατὰ πρῶτον εἰς τὰς ἰσοδυνάμους ἐκφράσεις.

$$2^3.\ 3^2.\ 7,\ \ 2^2.\ 3^3.\ 7,\ \ 2^2.\ 3^2.\ 5.\ 7,\ \ 2.\ 3.\ 7^3.$$

εὑρίσκομεν μ. κ. δ. $2\times3\times7=42$. ἁπλουστέρους δὲ ὅρους 12, 17, 30 καὶ 49.

200. Ε'. *Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν ἀναγώγων κλασμάτων.* — Ὠνομάσαμεν κλάσμα ἀνάγωγον ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ δι' ἁπλουστέρων ὅρων, ἢ ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐνταῦθα ἐρχόμεθα νὰ ἀποδείξωμεν γενικωτέραν τὴν πρότασιν ταύτην· ὅτι κλάσμα τι, ἔχον τοὺς ὅρους αὐτοῦ πρώτους πρὸς ἀλλήλους, εἶναι φύσει ἀνάγωγον εἰς ἁπλουστέραν ἔκφρασιν, οὐχὶ μόνον διὰ τῆς διαιρέσεως, ἀλλὰ καὶ διὰ πάσης ἄλλης πιθανῆς μεθόδου.

Ἡ πρότασις αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἑξῆς ἀρχῆς. Δύο κλάσματα ἀνάγωγα δὲν δύνανται νὰ ἦναι ἴσα, ἐκτὸς ἂν ταὐτίζωνται οἱ ὅροι αὐτῶν ἀριθμητὴς πρὸς ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴς πρὸς παρονομαστήν.

Διότι ἔστωσαν, εἰ δυνατὸν, τὰ ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{α}{β}$ καὶ $\frac{γ}{δ}$ ἴσα, ὥστε $\frac{α}{β}=\frac{γ}{δ}$. Πολυπλασιάζοντες ἑκάτερον μέλος ἐπὶ δ συνάγομεν $\frac{αδ}{β}=γ$· καὶ ἐπειδὴ ὁ γ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἄρα καὶ $\frac{αδ}{β}$ εἶναι ἐπίσης, καὶ ἑπομένως αδ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ β. Ἀλλὰ ὁ β ὑπετέθη πρῶτος πρὸς τὸν παράγοντα α· ἄρα πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον δ, καὶ ἑπομένως ὁ δ πρέπει νὰ ἦναι πολυπλάσιόν τι τοῦ β, ἤτοι δ=βκ· ἀντικαθιστῶντες ἤδη εἰς τὴν ἰσότητα $γ=\frac{αδ}{β}$ τὸ ἰσοδύναμον τοῦ δ, συνάγομεν $γ=\frac{αβκ}{β}=ακ$. Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{γ}{δ}$ τρέπεται εἰς $\frac{ακ}{βκ}$. Ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου βλέπομεν, ὅτι οἱ ὅροι γ καὶ δ τοῦ κλάσματος $\frac{γ}{δ}$ τοῦ ἰσοδυναμοῦντος μὲ τὸ ἀνάγωγον $\frac{α}{β}$, δὲν δύνανται νὰ ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀλλὰ ὅμοια πολυπλάσια τῶν ὅρων α καὶ β, καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{γ}{δ}$ δὲν εἶναι, ὡς ὑπεθέσαμεν, κλάσμα ἀνάγωγον ἁπλούστερον τοῦ $\frac{α}{β}$.

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης ἕπεται ἤδη, ὅτι οὐχὶ μόνον διὰ τῆς διαιρέσεως, ἀλλὰ καὶ δι' οἱασδήποτε ἐργασίας εἶναι ἀδύνατος ἡ ἁπλούστευσις τῶν ἀναγώγων κλασμάτων. Ὅθεν ἀποβαίνει ματαία πᾶσα ἀναζήτησις πιθανῆς τινος τοιαύτης μεθόδου.

§. έ. Περὶ τῶν περιοδικῶν κλασμάτων.

201. Ἡ τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν δίδει ἀφορμὴν εἰς οὐσιώδεις παρατηρήσεις, περὶ τῶν ὁποίων ἐνταῦθα διαλαμβάνομεν.

Α΄. Πᾶν κοινὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς περιέχει μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5, τρεπόμενον εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν, ἐκφράζεται δι᾽ ὡρισμένου ἀριθμοῦ δεκαδικῶν χαρακτήρων. Καὶ ἐὰν τὸ προκείμενον κοινὸν ἦναι ἀνάγωγον, τότε τόσοι θέλουσιν εἶσθαι οἱ χαρακτῆρες τοῦ ἰσοδυνάμου δεκαδικοῦ, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ μεγαλητέρου ἐκθέτου τοῦ ἑνὸς τῶν δύο παραγόντων 2, ἢ 5.

Π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{25}$, $\frac{11}{40}$, καὶ $\frac{317}{1250}$, τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ εἶναι 2^3, 5^2, $2^3 . 5$ καὶ $2 . 5^4$, τρεπόμενα εἰς δεκαδικὰ, γράφονται τὸ μὲν διὰ τριῶν, τὸ δὲ διὰ δύο, τὸ δὲ διὰ τριῶν καὶ τὸ τέταρτον διὰ τεσσάρων χαρακτήρων κατὰ τοὺς ἀνωτέρους ἐκθέτας, 3, 2, 3, καὶ 4 τῶν παραγόντων 2 καὶ 5. Τῷ ὄντι εὑρίσκομεν τὰ ἰσοδύναμα 0,875, 0,52, 0,275 καὶ 0,2536.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως ταύτης παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 10, 100, 1000, κτλ. ἰσοῦνται μὲ 2×5, $2^2 \times 5^2$, $2^3 \times 5^3$ κτλ. τουτέστιν εἶναι γινόμενα δύο ἴσων δυνάμεων τοῦ 2 καὶ 5.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ διὰ τὴν τροπὴν τοῦ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικὸν γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμητοῦ ἓν, δύο ἢ περισσότερα μηδενικὰ, ὅσοι εἶναι οἱ ζητούμενοι χαρακτῆρες εἰς τὸ ἰσοδύναμον δεκαδικὸν, τουτέστι πολυπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 10, 100, 1000, κτλ. ἕπεται ὅτι διὰ τῆς πράξεως ταύτης εἰσάγομεν εἰς τὸν ἀριθμητὴν πολλάκις τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5 τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ οὕτως ἀποκαθιστῶμεν τὸν ἀριθμητὴν ἀκριβὲς πολυπλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἐπομένως ἀκριβῶς διαιρετὸν δι᾽ αὐτοῦ.

Π. χ. εἰς τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$, πολυπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ 7 ἐπὶ 1000, εἰσάγεται εἰς αὐτὸν τρὶς ὁ παράγων 2 τοῦ παρονομαστοῦ· ὅθεν μέχρι χιλιοστημορίων προεκτείνεται ἡ πρᾶξις.

Ὁμοίως διὰ τὸ $\frac{13}{25}$ ἡ πρᾶξις ἐκτείνεται μέχρις ἑκατοστημορίων. Ἐπειδὴ, πολυπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ 13 ἐπὶ 100, εἰσάγεται δὶς ὁ παράγων 5, κτλ.

202. Β΄. Πᾶν κοινὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς, ὢν πρῶτος πρὸς τὸν ἀριθμητὴν, περιέχει παράγοντας ἄλλους, ἢ τοὺς 2 καὶ 5, ἀγόμενον εἰς δεκαδικὸν, δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ δι᾽ ὡρισμένου ἀριθμοῦ δεκαδικῶν χαρακτήρων. Προχωρούσης δὲ τῆς πράξεως, θέλουσιν ἀναφανῆ

οἱ αὐτοὶ χαρακτῆρες περιοδικῶς κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν· ὡς ἐκ τούτου τὰ προκύπτοντα ταῦτα κλάσματα λέγονται περιοδικά.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ διὰ τοῦ πολυπλασιασμοῦ τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 10, 100, 1000 κτλ, εἰσάγομεν εἰς τὸν ἀριθμητὴν μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5 εἰς μίαν τινὰ δύναμιν, μὴ περιεχομένους εἰς τὸν παρονομαστὴν, καὶ ἑπομένως ὁ ἀριθμητὴς συντίθεται ὡς καὶ πρότερον ἐκ παραγόντων ἀλλοτρίων τῶν τοῦ παρονομαστοῦ· ἄρα ὁ παρονομαστὴς δὲν δύναται νὰ διαιρέσῃ ἀκριβῶς τοιοῦτον διαιρετέον, καὶ οὕτως ἡ πρᾶξις θέλει προαχθῇ ἐπ' ἄπειρον.

Ὅτι δὲ τὸ προκύπτον τοῦτο δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι περιοδικὸν ἀποδεικνύεται κατὰ τὸν ἑξῆς συλλογισμόν. Ἐπειδὴ, κατὰ τὰς ἀρχὰς τῆς διαιρέσεως, πᾶν μερικὸν ὑπόλοιπον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου, εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ πολὺ μετὰ τόσας διαιρέσεις, ὅσος εἶναι ὁ διαιρέτης μεῖον μιᾶς, θέλουσιν ἐξαντληθῆ ὅλα τὰ διάφορα ταῦτα ὑπόλοιπα, καὶ οὕτως εἰς τὴν ἐφεξῆς μερικὴν διαίρεσιν θέλει ἀναφανῆ ἀναγκαίως ἓν ἐκ τῶν προηγουμένων. Τούτου τεθέντος, γράφοντες 0 πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ σχηματίζομεν νέον διαιρετέον ὅμοιον μὲ ἕνα τῶν προηγουμένων, καὶ ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης εἶναι ὁ αὐτὸς, διὰ τοῦτο θέλομεν λάβει καὶ ὅμοιον πηλίκον καὶ ὡσαύτως ὅμοιον ὑπόλοιπον, ὡς καὶ πρότερον. Ὅθεν ἡ ἄλυσις αὐτὴ τῶν πράξεων θέλει φέρει τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

203. Ἐφαρμόζομεν τὴν γενικὴν ταύτην ἰδέαν εἰς τὰ ἑξῆς μερικὰ παραδείγματα.

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{6}{7}$. Προχωροῦντες κατὰ τὸν κανόνα τὴν τροπὴν αὐτοῦ εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν μέχρι τοῦ ἕκτου δεκαδικοῦ χαρακτῆρος, λαμβάνομεν πηλίκον 0,857142 καὶ ὑπόλοιπον 6, ὁποῖον εἴχομεν ὡς ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος. Ὅθεν γράφοντες τὸ μηδενικὸν ἐπανερχόμεθα εἰς τὸν αὐτὸν διαιρετέον 60 καὶ ἑπομένως εἰς τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, ὡς καὶ πρότερον.

```
60 | 7
 40  0,857142
  50
   10
    30
     20
      6
```

Ἔστω ὁμοίως τὸ κλάσμα $\frac{13}{37}$. Ἐνταῦθα ἡ περίοδος φανεροῦται ἀπὸ τοῦ τετάρτου δεκαδικοῦ χαρακτῆρος. Ἐπειδὴ, πρὶν ἔτι ἐξαντληθῶσι τὰ 36 διάφορα ὑπόλοιπα, τὰ ὁποῖα ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν, προέλαβε τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον 13 μετὰ τὴν τρίτην μερικὴν διαίρεσιν.

```
130 | 37
190  0,351 | 3...
 50
  130
```

Ἔστω τρίτον τὸ κλάσμα $\frac{147}{875}$, εἰς τὸ ὁποῖον ἐκ πρώτης ὄψεως ὁ παρονομαστὴς 875 ἐξισούμενος μὲ 7×125, προαποδεικνύει ἀπροσδιόριστον τὸ ἰσοδύναμον δεκαδικὸν, καθὸ ἐμπεριέχον τὸν παράγοντα 7· ἀλλὰ τρεπόμενον ἄγεται εἰς τὸ ὡρισμένον 0,168· Τοῦτο προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι ὁ αὐτὸς παράγων 7 ἐμπεριέχεται καὶ εἰς τὸν ἀριθμητὴν 147· ὥστε, ἐκθλιβομένου τοῦ κοινοῦ τούτου παράγοντος τὸ προκείμενον κλάσμα ἄγεται εἰς $\frac{21}{125}$, ἤτοι $\frac{21}{5^3}$, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ τρέπεται εἰς ὡρισμένην δεκαδικὴν ἰσοτίμησιν.

1470	875
5950	0,168
7000	
00	

204. Ἔστω τέλος τὸ κλάσμα $\frac{29}{84}$.

Ἐφαρμόζοντες καὶ ἐνταῦθα τὸν κανόνα εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον δεκαδικὸν τὸ ἀπροσδιόριστον 0,34523809523809 . . . εἰς τὸ ὁποῖον ἡ περίοδος ἄρχεται ἀπὸ τοῦ τρίτου δεκαδικοῦ χαρακτῆρος.

Διὰ τὴν διαφορὰν ταύτην ὀνομάζομεν τὰ τοιαῦτα κλάσματα μικτὰ περιοδικὰ, καθὸ περιέχοντα ἀκεραίας περιόδους καὶ χαρακτῆρας μὴ ἀπαρτίζοντας μέρος τῆς περιόδου, πρὸς διάκρισιν τῶν ἄλλων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ περίοδος ἀναφαίνεται ἀμέσως ἐκ τῶν δεκατημορίων, καὶ τὰ ὁποῖα καθὸ συγκροτούμενα ἐκ μόνων περιόδων, λέγονται διὰ τοῦτο ἁπλᾶ περιοδικά.

Παρακατιόντες θέλομεν μάθει ποῖα τῶν κοινῶν κλασμάτων τρέπονται εἰς ἁπλᾶ καὶ ποῖα εἰς μικτὰ περιοδικά.

205. Ἐπιχειροῦμεν ἤδη τὴν λύσιν τοῦ ἀντιστρόφου ζητήματος, τουτέστιν ἀπὸ δεκαδικοῦ τινος κλάσματος οἱουδήποτε νὰ ἀνιχνεύσωμεν τὸ ἰσοδύναμον κοινὸν, ἐκ τοῦ ὁποίου προέκυψεν.

Τὸ ζήτημα τοῦτο ἐρευνῶμεν κατὰ τὰς ἑξῆς τρεῖς περιστάσεις. Πρῶτον, ὅταν τὸ προκείμενον δεκαδικὸν ἔχῃ ὡρισμένους χαρακτῆρας, οἷον 0,875. Εἰς τὴν περίςασιν ταύτην οὐδεμία παρουσιάζεται δυσκολία. Γράφομεν τὸ δεδομένον δεκαδικὸν ὑπὸ μορφὴν κοινοῦ κλάσματος, ἁπλουστεύομεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ, τὸ οὕτω δὲ συναγόμενον ἀνάγωγον εἶναι τὸ ζητούμενον κοινόν. Οὕτως, 0,875, ἰσοῦται μὲ $\frac{875}{1000}$, καὶ διὰ τῆς ἁπλουστεύσεως τῶν ὅρων ἰσοῦται μὲ $\frac{7}{8}$· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ζητούμενον ἀνάγωγον· ἐπειδὴ καὶ τὸ ἴσον αὐτοῦ, ἐπίσης ἀνάγωγον, δὲν δύναται νὰ διαφέρῃ κατὰ τοὺς ὅρους, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν παρατήρησιν τῶν ἀναγώγων (ἀριθ. 200).

206. Δεύτερον, ἔστω τὸ δεκαδικὸν κλάσμα ἁπλοῦν περιοδικὸν, π. χ. 0,αβγδε αβγδε. Σημειοῦντες τὸ ἄγνωστον κοινὸν κλάσμα διὰ χ ἔχομεν χ=0,αβγδε αβγδε . . . (1).

Πολυπλασιάζοντες ἑκάτερον μέλος τῆς ἰσότητος ἐπὶ 100000, τουτέστιν ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἐκ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσοι εἶναι οἱ χαρακτῆρες τῆς περιόδου, λαμβάνομεν 100000 χ=αβγδε, αβγδε αβγδε (2).

Καὶ ἀφαιροῦντες μέλος πρὸς μέλος τὴν ἰσότητα (1) ἀπὸ τῆς (2) λαμβάνομεν $100000\,\chi-\chi=$αβγδε

ἤτοι $99999\,\chi=$αβγδε

καὶ τέλος $\chi=\dfrac{\text{αβγδε}}{99999}$

Ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου τύπου παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι ἁπλοῦν τι περιοδικὸν ἰσοδυναμεῖ μὲ κοινόν, τοῦ ὁποίου ἀριθμητὴς μὲν εἶναι ὁ παριστανόμενος διὰ τῆς περιόδου ἀριθμός, παρονομαστὴς δὲ ἀριθμός, συγκροτούμενος ἐκ τοσούτων 9, ὅσους χαρακτῆρας ἔχει ἡ περίοδος.

Ἀναγομένου ἤδη τοῦ κλάσματος εἰς τοὺς ἐλαχίστους ὅρους, προσδιορίζεται τὸ ζητούμενον ἀνάγωγον κοινόν, ἐξ οὗ προέκυψε τὸ δεδομένον ἁπλοῦν περιοδικόν.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον εὑρίσκομεν, ὅτι 0,351 351 351 ἰσοῦται μὲ $\frac{351}{999}$, ἢ μᾶλλον μὲ τὸ ἰσοδύναμον $\frac{13}{37}$.

Καὶ ὁμοίως 0,039603960396 . ., τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος εἶναι 0396, ἰσοῦται μὲ $\frac{396}{9999}$, ἤτοι μὲ $\frac{4}{101}$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἔχομεν καὶ τὰ ἑξῆς περίεργα παραδείγματα.

$$0,99999999\ldots=\tfrac{9}{9}=1.$$

$$0,0123456789 0123456789\ldots=\tfrac{123456789}{9999999999}=\tfrac{1}{81}=\frac{1}{3^4}.$$

$$0,987654320\ 987654320\ldots=\tfrac{80}{81}.$$

Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα περιέχῃ καὶ ἀκέραια, τότε τρέπομεν πρῶτον τὸ κλασματικὸν μέρος εἰς τὸ ἰσοδύναμον κοινόν, καὶ μετὰ ταῦτα προσθέτομεν καὶ τὸ ἀκέραιον. Ἔστω π. χ. 4,162162162 .... διὰ μὲν τὸ κλασματικὸν μέρος ἔχομεν κατὰ πρῶτον $\frac{162}{999}=\frac{6}{37}$.

Προσθέτοντες καὶ τὸ ἀκέραιον 4 συνάγομεν·

$$4,162162162\ldots=4+\tfrac{6}{37}=\tfrac{154}{37}$$

207. Τρίτον. — Ἔστω τέλος πάντων ἀπὸ τοῦ μικτοῦ περιοδικοῦ, ἐξ ὑποθέσεως 0,πκρσ αβγδε αβγδε..., νὰ ἀνεύρωμεν τὸ κοινόν, ἐξ οὗ προέκυψεν. Σημειοῦντες τὸ ἄγνωσον κοινὸν διὰ χ ἔχομεν κατὰ πρῶτον $\chi=$ 0,πκρσ αβγδε αβγδε . : .

Καὶ πολυπλασιάζοντες ἑκάτερον μέλος ἐπὶ 10000, τουτέστιν ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἐκ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσοι εἶναι οἱ μὴ ἐμπεριλαμβανόμενοι εἰς τὴν περίοδον χαρακτῆρες, λαμβάνομεν 10000χ= πκρσ, αβγδε αβγδε ...

Καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν αβγδε αβγδε .... διὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τύπου $\frac{αβγδε}{99999}$

εὑρίσκομεν $10000\,χ = πκρσ + \frac{αβγδε}{99999}$.

καὶ ἀνάγοντες τὸ ἀκέραιον καὶ κλάσμα εἰς ἰσοδύναμον κλασματικὸν εὑρίσκομεν·

$$1000χ = \frac{πκρσ \times 99999 + αβγδε}{99999.}$$

καὶ τέλος διαιροῦντες διὰ τοῦ 10000 εὑρίσκομεν·

$$χ = \frac{πκρσ \times 99999 + αβγδε}{999990000}.$$

Ὁ τελευταῖος οὗτος τύπος ἐπιδέχεται ἔτι ἁπλουστέραν ἔκφρασιν τὴν ἑξῆς. Ἐπειδὴ $99999 = 100000 - 1$, ἄρα καὶ $πκρσ \times 99999 = πκρσ(100000 - 1) = πκρσ\,00000 - πκρσ$.

ὅθεν $πκρσ \times 99999 + αβγδε = πκρσ\ 00000 + αβγδε - πκρσ = πκρσ\ αβγδε - πκρσ$.

Ἤτοι $χ = \frac{πκρσ\ αβγδε - πκρσ}{99999\ 0000}$

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα ἰσοδυναμεῖ μὲ κοινόν, τοῦ ὁποίου ἀριθμητὴς μὲν εἶναι τὸ σύστημα τῶν χαρακτήρων τῶν μὴ εἰσερχομένων εἰς τὴν περίοδον καὶ τῶν τῆς πρώτης περιόδου, ἐλαττούμενον κατὰ τὸ μὴ εἰσερχόμενον εἰς τὴν περίοδον μέρος· παρονομαστὴς δὲ ἀριθμὸς συγκροτούμενος ἐκ τοσούτων 9, ὅσοι εἶναι οἱ χαρακτῆρες τῆς περιόδου καὶ ἀκολουθούμενος ἐκ τοσούτων μηδενικῶν, ὅσοι οἱ μὴ εἰσερχόμενοι εἰς τὴν περίοδον χαρακτῆρες.

Κατὰ τὸν γενικὸν τοῦτον τύπον εὑρίσκομεν, ὅτι 0,3193069306... ἰσοῦται μὲ $\frac{319306-31}{999900} = \frac{319275}{999900}$ καὶ διαιρουμένων τῶν ὅρων διαδοχικῶς διὰ τοῦ 9,25 καὶ 11, εὑρίσκομεν τὸ ἀνάγωγον $χ = \frac{129}{404}$.

208. Οἱ ἀνωτέρω δύο τύποι τῆς τροπῆς τῶν περιοδικῶν εἰς τὰ ἰσοδύναμα κοινά, ἐρευνώμενοι ἀναλυτικώτερον ὑποδεικνύουσι ποῖα τῶν κοινῶν κλασμάτων τρέπονται εἰς ἁπλᾶ καὶ ποῖα εἰς μικτὰ περιοδικά.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ εἰς τὸν γενικὸν τύπον $\frac{αβγδε}{99999}$ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ

99999 δὲν ἔχει τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5, φανερὸν, ὅτι καὶ μετὰ τὴν ἁπλούστευσιν τῶν ὅρων θέλει παραχθῇ κλάσμα τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν θέλει ἔχει αὐτοὺς τοὺς παράγοντας. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι κοινόν τι κλάσμα, ἐξ οὗ προκύπτει ἁπλοῦν περιοδικὸν, δὲν ἔχει εἰς τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5.

Ἐξ ἑτέρου ὁ τύπος $\frac{\pi\kappa\rho\sigma\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon - \pi\kappa\rho\sigma}{999990000}$ τῶν μικτῶν περιοδικῶν ὑποδεικνύει πᾶν τοὐναντίον. Διότι φανερὸν κατὰ πρῶτον, ὅτι ὁ μὲν παρονομαστὴς, λήγων εἰς τέσσαρα μηδενικὰ, ἔχει ἀμφοτέρους τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5 εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν, ὁ δὲ ἀριθμητὴς, ἐκφραζόμενος διὰ τῆς διαφορᾶς πκρσαβγδε—πκρσ, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ληκτικοὺς χαρακτῆρας τὸ 0· διότι οἱ τελευταῖοι χαρακτῆρες ε καὶ σ καὶ ὁμοίως δ καὶ ρ, ὑπετέθησαν διάφοροι· ἐκ τούτου ὁ ἀριθμητὴς οὗτος δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἀμφοτέρους τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5· ἀλλὰ θέλει ἔχει ἢ τὸν 2, ἂν λήγῃ εἰς 2, 4, 6, 8, ἢ τὸν 5, ἂν λήγῃ εἰς 5, ἢ μηδέτερον τούτων ἂν λήγῃ εἰς 1, 3, 7, καὶ 9. Τούτου τεθέντος, μετὰ τὸν σημειούμενον ὑπολογισμὸν τοῦ ἀριθμητοῦ πκρσαβγδε—πκρσ καὶ τὴν ἀγωγὴν τοῦ κλάσματος εἰς τοὺς ἁπλουστέρους ὅρους, ὁ παρονομαστὴς τοῦ παραχθησομένου ἀναγώγου θέλει διατηρήσει ἕνα τῶν δύο τούτων παραγόντων ἢ τὸν 2, ἢ τὸν 5 εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν ἢ καὶ ἀμφοτέρους. Ἀλλὰ τὸ ἀνάγωγον τοῦτο κλάσμα, εἶναι τὸ κοινὸν, ἐξ οὗ προέκυψε τὸ μικτὸν περιοδικόν· ἄρα πᾶν κοινὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς, ὢν πρῶτος πρὸς τὸν ἀριθμητὴν, ἐκτὸς τῶν ἄλλων παραγόντων περιέχει καὶ τὸν παράγοντα 2 καὶ 5 εἰς μίαν τινὰ δύναμιν, τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν, ἐκφράζεται ὡς μικτὸν περιοδικόν· τοσοῦτοι δὲ εἶναι οἱ μὴ εἰσερχόμενοι εἰς τὴν περίοδον χαρακτῆρες, ὅσος εἶναι ὁ μεγαλήτερος ἐκθέτης τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων 2 καὶ 5.

Τῷ ὄντι εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα διὰ μὲν τὰ κλάσματα $\frac{6}{7}$ καὶ $\frac{13}{37}$ ἐλάβομεν ἰσοδύναμα ἁπλᾶ περιοδικά· ἐπειδὴ οἱ παρονομασταὶ 7 καὶ 37 δὲν περιεῖχον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5. Διὰ δὲ τὸ $\frac{29}{84}$ εὕρομεν μικτὸν, τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἤρξατο μετὰ τὸν δεύτερον χαρακτῆρα. Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς 84 ἐμπεριέχει τὸν παράγοντα 2 εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν.

Ὡσαύτως τὸ κλάσμα $\frac{145}{176}$, τιθέμενον ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{145}{2^4 . 11}$, προλέγει, ὅτι τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν ἐκφράζεται διὰ μικτοῦ περιοδικοῦ, καὶ ὅτι ἡ περίοδος αὐτοῦ ἄρχεται μετὰ τέσσαρας, ἤτοι ἀπὸ τοῦ πέμπτου χαρακτῆρος. Καὶ τῷ ὄντι εὑρίσκομεν $\frac{145}{176} = 0,82386363\ldots$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄.

Σχηματισμὸς τῶν δυνάμεων καὶ ἐξαγωγὴ τῶν τετραγωνικῶν καὶ κυβικῶν ῥιζῶν.

§. ά Περὶ τοῦ τετραγώνου καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

209. Εἰς τὸν ἀριθ. 166 ἀπεδώκαμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως καὶ τῆς ῥίζης, καὶ μερικώτερον τοῦ τετραγώνου καὶ κύβου καὶ τῶν ῥιζῶν τετραγωνικῆς καὶ κυβικῆς. Ἐκ τῶν συσχετικῶν τούτων ἀριθμῶν πηγάζουσιν ἤδη δύο οὐσιώδη ζητήματα ὁ σχηματισμὸς τῶν δυνάμεων καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ, ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς δύο νέαι ἀρχικαὶ πράξεις τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ, ἀφορῶσαι ἡ μὲν τὴν σύνθεσιν ἀριθμῶν ἐξ ἑτέρου, πολυπλασιαζομένου ὑφ᾽ ἑαυτὸν πολλάκις, ἡ δὲ τὴν ἀνάλυσιν τῶν οὕτω συντεθειμένων εἰς τοὺς ἴσους αὐτῶν παράγοντας.

Ὡς πρὸς τὸ πρῶτον ζήτημα οἱ κανόνες τοῦ πολυπλασιασμοῦ ἀρκοῦσι διὰ τὸν σχηματισμὸν οἱασδήποτε δυνάμεως. Ἀλλὰ διὰ τὸ δεύτερον δὲν δυνάμεθα ἀντιστρόφως νὰ μεταχειρισθῶμεν τὴν διαίρεσιν. Ἐπειδὴ δὲν γνωρίζομέν τινα τῶν παραγόντων τῆς προτιθεμένης δυνάμεως· καὶ διὰ τοῦτο ὑποχρεούμεθα νὰ συζήσωμεν ἰδιαιτέρας μεθόδους. Ἐνταῦθα θέλομεν διαλάβει μόνον περὶ τετραγωνικῆς καὶ κυβικῆς ῥίζης· ἐπειδὴ ἡ ἀνάλογος ἀνάλυσις τῶν ὑψηλοτέρων δυνάμεων ἀπαιτεῖ μακροὺς καὶ πολυπλόκους ὑπολογισμούς. Εἰς τὸ τελευταῖον δὲ κεφάλαιον τῆς παρούσης πραγματείας θέλομεν γνωρίσει τὴν γενικὴν λύσιν ἀμφοτέρων τῶν ζητημάτων τούτων διὰ μεθόδων ἀσυγκρίτως ἁπλουστέρων.

Περὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

210. Ἡ μέθοδος τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ὑποτίθησι γνωστὰ τὰ τετράγωνα τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν· οὕτως ὁ ἑξῆς πίναξ τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι ἡ προπαίδεια τῆς πράξεως ταύτης.

ἀριθμοὶ	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
τετράγωνα	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.

Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου ἀναγνωρίζομεν ἀμέσως, ὅτι τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ, ἐκφραζομένου δι᾽ ἑνὸς χαρακτῆρος, συνίσταται τὸ πολὺ ἐκ δύο χαρακτήρων. Διότι τοῦ 10, τοῦ ἐλαχίστου τῶν ἐκ δύο χαρακτήρων, τὸ τετράγωνον 100 ἔχει τρεῖς χαρακτῆρας.

211. Βλέπομεν πρὸς τούτοις ὅτι ἐν ᾧ αἱ ῥίζαι φυλάττουσι τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον αὔξουσαν κατὰ μονάδα, τὰ τετράγωνα αὐτῶν προβαίνουσιν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον κατ᾽ ἀνώτερα διαστήματα· ἐντὸς δὲ τῶν διαστημάτων τούτων, ὡς μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 4, τοῦ 4 καὶ 9, ὁμοίως τοῦ 9 καὶ 16 κτλ. ὑπάρχουσιν ἀκέραιοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἡ ῥίζα ἐμπεριέχεται μεταξὺ δύο κατὰ μονάδα διαφερόντων ἀκεραίων ἀριθμῶν. Π. χ. ἡ ῥίζα τοῦ 53, περιεχομένου μεταξὺ τοῦ 49 καὶ 64, πρέπει νὰ ἐμπεριλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 7 καὶ 8· ὡσαύτως ἡ τοῦ 45 μεταξὺ τοῦ 6 καὶ 7, κτλ. Τὰς ῥίζας τῶν ἀτελῶν τούτων τετραγώνων ὑπολαμβάνομεν κατὰ πρῶτον ὡς κλασματικάς· ἀλλ᾽ ἐπισκοποῦντες ἐπιστημονικώτερον τὴν φύσιν αὐτῶν πληροφορούμεθα τὸ ἐναντίον· τουτέστιν ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἀριθμός τις ἀκέραιος, μὴ ὢν τέλειον τετράγωνον ἑτέρου ἀκεραίου, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἀκριβῆ ῥίζαν οὔτε κλασματικὸν ἀριθμόν.

Διότι ἔστω, εἰ δυνατόν, ῥίζα τοῦ 53 ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{\alpha}{\beta}$ ἀνάγωγος εἰς ὁλοσχερῆ, ἤτοι $\sqrt{53}=\frac{\alpha}{\beta}$· ἐκ τούτου πρέπει νὰ ἔχωμεν $53=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$.

Καὶ ἐπειδὴ οἱ δύο ὅροι α καὶ β ὑπετέθησαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τοιοῦτοι δὲ εἶναι καὶ αἱ δυνάμεις α^2 καὶ β^2 (ἀριθ 180), ἄρα καὶ ὁ κλασματικὸς $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ μένει ἀνάγωγος εἰς ὁλοσχερῆ. Τούτου τεθέντος, δὲν συμβιβάζεται ἡ ἰσότης τοῦ ἀκεραίου 53 πρὸς τὸν φύσει κλασματικὸν $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. Ἄρα $\sqrt{53}=\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἄτοπος ὑπόθεσις· ἐπομένως ἀκέραιος ἀριθμὸς μὴ ἔχων ῥίζαν ἀκεραίαν, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ οὔτε κλασματικήν. Ἐκ τούτου αἱ ῥίζαι αὗται, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{22}$, κτλ. καὶ ἐν γένει καὶ αἱ τῶν ἄλλων βαθμῶν ὅμοιαι λέγονται ἀσύμμετροι τουτέστι ποσὰ μὴ ἔχοντα ὡρισμένον μέτρον, ὡς ὅρον συγκρίσεως πρὸς τὴν μονάδα· ἐφεξῆς θέλομεν δείξει τὸν τρόπον τῆς ἐκτιμήσεως αὐτῶν κατὰ προσέγγισιν οἱανδήποτε.

212. Εἴδομεν, ὅτι τὰ τετράγωνα δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν διαφέρουσιν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον, καθόσον οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι μεγαλήτεροι. Ἡ πρόοδος αὕτη τῶν διαφορῶν ἔχει σταθερόν τινα νόμον, τὸν ὁποῖον συμφέρει νὰ γνωρίσωμεν.

Ἔστωσαν ἐν γένει οἱ δύο κατὰ διαδοχὴν ἀριθμοὶ α καὶ $\alpha+1$. Τὰ τετράγωνα αὐτῶν θέλουσιν εἶσθαι τοῦ ἑνὸς μὲν $\alpha\times\alpha=\alpha^2$, τοῦ ἑτέρου δὲ $(\alpha+1)(\alpha+1)=\alpha^2+2\alpha+1$· ὅθεν ἡ διαφορὰ αὐτῶν ἐκφράζεται διὰ τοῦ γενικοῦ τύπου $2\alpha+1$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται, ὅτι ἡ διαφορὰ δύο κατὰ μονάδα διαφερόντων ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ διπλοῦν τοῦ μικροτέρου πλέον ἑνός. Ἐκ τούτου καὶ ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι μεγαλητέρα, καθόσον εἶναι μεγαλήτεροι οἱ συγκρινόμενοι ἀριθμοί. Τῷ ὄντι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τοῦ 5 καὶ 6 εἶναι $2\times5+1=11$, ὡς δείκνυται καὶ εἰς τὸν πίνακα, καὶ ὁμοίως $43^2-42^2=2\times42+1=85$ κλ.

213. Μεταβαίνομεν ἤδη εἰς ἀναζήτησιν τῶν μεθόδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἀκεραίων· ἵνα βαδίσωμεν δὲ ἀναλυτικῶς, ἀνάγκη νὰ ἐρευνήσωμεν λεπτομερέστερον τὸν σχηματισμὸν τοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ συγκροτουμένου ἐκ μονάδων καὶ δεκάδων, π. χ. τοῦ 43· τουτέστιν ἀνάγκη νὰ μάθωμεν πῶς συμπλέκονται συναλλήλως οἱ δύο χαρακτῆρες, οἷον ὁ τῶν δεκάδων 4 καὶ ὁ τῶν μονάδων 3, διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ τετραγώνου 1849.

Πρὸς τοῦτο ἀναλύομεν τὸν ἀριθμὸν 43 ὡς καὶ πάντα ἄλλον εἰς δεκάδας καὶ μονάδας, οἷον $40+3$ καὶ παριστάνοντες τὰς μὲν δεκάδας διὰ τοῦ α τὰς δὲ μονάδας διὰ τοῦ β συνάγομεν τὸν γενικὸν τύπον $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+2\,\alpha\beta+\beta^2$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἑρμηνεύεται, ὅτι τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ, συγκροτουμένου ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων, ἐμπεριέχει τρία διακεκριμένα μέρη, τουτέστι τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, καὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων. Οὕτω διὰ τὸν ἀριθμὸν 43 ἔχομεν

$$\begin{aligned} \alpha^2&=(40)^2 &&=1600\\ 2\,\alpha\beta&=2\times40\times3 &&=\ \ 240\\ \beta^2&=3^2 &&=\ \ \ \ \ 9\\ \hline & &&1849=43\times43 \end{aligned}$$

Τούτου τεθέντος, ὅπως ἐπιστρέψωμεν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου 1849 εἰς τὴν ῥίζαν 43, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τετράγωνον 16 ἑκατοντάδες, ἢ 1600 τοῦ χαρακτῆρος 4 τῶν δεκάδων, μὴ ἔχον σημαντικὸν χαρακτῆρα κάτωθι τῶν ἑκατοντάδων, προστεθὲν μετὰ τῶν δύο ἄλλων μερῶν, κατέλαβε θέσιν ὑπεράνω τῶν δεκάδων, τουτέστιν ἐντὸς τῶν 18 ἑκατοντάδων. Ὅθεν ζητοῦντες τὸ μεγαλήτερον τετράγωνον, τὸ περιεχόμενον εἰς τὰς 18 ἑκατοντάδας εὑρίσκομεν κατὰ τὸν πίνακα τὸν ἀριθμὸν 16, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα 4 ἐκφράζει τὰς δεκάδας τῆς ζητουμένης.

18,49	43
24,9	83
249	3
: : :	

Ἀφαιροῦντες τὸ τετράγωνον τοῦ 16 ἀπὸ τῶν 18 ἑκατοντάδων λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 2 ἑκατοντάδας καὶ 49 μονάδας, ἤτοι 249, τὸ ὁποῖον περιέχει τὰ δύο ἄλλα μέρη, ἤτοι τὸν 240, διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ τὸν 9, τετράγωνον τῶν μονάδων.

Ἐπειδὴ τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας δὲν ἔχει σημαντικὸν χαρακτῆρα κάτωθι τῶν δεκάδων, καὶ ὡς ἐκ τούτου προστεθὲν μετὰ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων κατέλαβε θέσιν μόνον ἐντὸς τῶν δεκάδων 24, διὰ τοῦτο διαιροῦντες τὸν 24 διὰ τοῦ 8, διπλασίου τῶν δεκάδων εὑρίσκομεν πηλίκον 3, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ χαρακτὴρ τῶν ζητουμένων μονάδων.

Ἑπομένως πολυπλασιάζομεν ἐπὶ 3 τὸν διαιρέτην 8 θεωρούμενον ὡς δεκάδας, καὶ τὸ γινόμενον 24 δεκάδας, ἤτοι 240 ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν 249, ἡ δὲ διαφορὰ 9 πρέπει νὰ ἦναι τὸ τετράγωνον τῶν 3 μονάδων ὡς ὑπάρχει πραγματικῶς.

Παρατηροῦντες ὅμως, ὅτι τὸ διπλοῦν τοῦ γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων ἀμφότερα πρέπει νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὸν 249, λαμβάνομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἀμέσως, ἂν πλησίον τοῦ 8, διπλασίου τῶν δεκάδων γράψωμεν τὸν εὑρεθέντα χαρακτῆρα 3 τῶν μονάδων καὶ πολυπλασιάσωμεν 83 ἐπὶ 3. Διότι εἴτε πολυπλασιάσωμεν τὸ διπλοῦν τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ μετὰ ταῦτα τὰς μονάδας ἐφ᾽ ἑαυτὰς καὶ προσθέσωμεν τὰ δύο γινόμενα, εἴτε προσθέσωμεν κατὰ πρῶτον τοὺς δύο πολυπλασιαστέους, τουτέστι τὸ διπλοῦν τῶν δεκάδων καὶ τὰς ἁπλᾶς μονάδας καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν πολυπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν χαρακτῆρα τῶν μονάδων, ὡς κοινὸν πολυπλασιαστήν, τὸ ἐξαγόμενον εἶναι τὸ αὐτὸ τουτέστι $80\times3+3\times3=(80+3)\,3=83\times3=249$.

214. Ἔστω ἤδη ἀπροσχημάτιστόν τι τετράγωνον ὁ ἀριθμὸς 324, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ῥίζαν.

3,24	18
22,4	28
224	8
: : :	

Ἐπειδὴ ἐκφράζεται διὰ πλειόνων τῶν δύο χαρακτήρων, ἄρα ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἔχει δεκάδας· ὅθεν ἀπὸ τοῦ τμήματος τῶν ἑκατοντάδων εὑρίσκομεν 1 διὰ τὰς δεκάδας τῆς ῥίζης, καὶ ἀφαιροῦντες λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 224. Διαιροῦντες τὸ πρὸς ἀριστερὰν μέρος αὐτοῦ 22 δεκάδας διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων, λαμβάνομεν πηλίκον τὰς μονάδας τῆς ῥίζης. Ἐνταῦθα ὁ ἀριθμὸς 22 περιέχει τὸν διαιρέτην 2 ἑνδεκάκις, ἀλλ᾽ οὐχὶ μόνον δὲν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ὡς μονάδα τῆς ῥίζης πλέον τοῦ 9, ἀλλὰ καὶ αὐτὸς ὁ 9 εἶναι ἀνώτερος τοῦ ζητουμένου· διότι γράφοντες τὸν 9 πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 2 καὶ πολυπλασιάζοντες 29 ἐπὶ 9, λαμβάνομεν 261, ἀνώτερον τοῦ 224. Οὐτω γράφομεν 8 εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων καὶ προσδιορίζομεν ἀκριβῆ ῥίζαν 18.

$$\begin{aligned} \text{Τῷ ὄντι}\quad \alpha^2 &= 100 \\ 2\alpha\beta &= 160 \\ \beta^2 &= \ \ 64 \\ \hline & 324 = 18\times 18. \end{aligned}$$

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διαίρεσις λαμϐάνεται ὡς βοηθητικὸν μέσον τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν μονάδων, καὶ ὅτι τὸ πηλίκον δὲν χρησιμεύει πάντοτε ὁλόκληρον, ἀλλὰ πρέπει βαθμηδὸν νὰ ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα ἑωσότου ὁ ὑπολογισμὸς αὐτοῦ δώσῃ γινόμενον, δυνάμενον νὰ ἀφαιρεθῇ.

215. Λαμϐάνομεν ἤδη συνθετώτερον παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 223729.

Χωρίζοντες τοὺς δύο τελευταίους χαρακτῆρας παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ μέρος τῶν ἑκατοντάδων 2237, ἐκφραζόμενον διὰ τεσσάρων χαρακτήρων, περιέχει τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα ἐκφράζεται διὰ δύο χαρακτήρων· ἄρα εἰς τὰς δεκάδας τῆς ζητουμένης ῥίζης ἐμπεριέχονται καὶ δεκάδες δεκάδων, ἤτοι ἑκατοντάδες· ἐξάγομεν λοιπὸν, κατὰ τὴν αὐτὴν ὡς ἀνωτέρω ἀνάλυσιν, κατὰ μὲν πρῶτον τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν 2237· ὅθεν εὑρίσκομεν 47 δεκάδας καὶ ὑπόλοιπον 28. Ἐφεξῆς δὲ καταβιϐάζοντες καὶ τὸ ἕτερον τμῆμα χωρίζομεν τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα, καὶ διαιροῦντες τὰς 282 δεκάδας διὰ τοῦ 94, διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, λαμϐάνομεν πηλίκον 3, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς μονάδας· γράφομεν τὸν χαρακτῆρα τοῦτον πλησίον τοῦ διπλασίου 94 καὶ πολυπλασιαστὴν, καὶ ἐκτελοῦντες τὴν πρᾶξιν λαμϐάνομεν γινόμενον ἴσον μὲ τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον 2829· ὅθεν εὑρίσκομεν ῥίζαν ἀκριβῆ 473.

22,37,29	473	
63,7	87	943
282,9	7	3
: : :	609	2829

$$\begin{aligned} \text{Τῷ ὄντι}\quad \alpha^2 &= (470)^2 = 220900 \\ 2\alpha\beta &= 2\ 470\times 3 = \ \ 2820 \\ \beta^2 &= 3^2 = \ \ \ \ \ \ 9 \\ \text{ἑπομένως}\quad \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 &= 223729 = 173\times 473. \end{aligned}$$

216. Καθολικεύοντες τὴν ἀνωτέρω ἀνάλυσιν δυνάμεθα ἤδη νὰ συστήσωμεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Ἀρχόμενοι δεξιόθεν, τέμνομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα, ἕκαστον ἐκ δύο χαρακτήρων, ἐκτὸς τοῦ τελευταίου πρὸς ἀριστερὰν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ καὶ ἕνα χαρακτῆρα.

Ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τοῦ ἐμπεριεχομένου εἰς τὸ πρῶτον πρὸς ἀριστερὰν τμῆμα, τὴν ὁποίαν γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ· τὸ δὲ τετράγωνον αὐτῆς ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ πρῶτον τμῆμα.

Εἰς τὸ ὑπόλοιπον καταβιβάζομεν καὶ τὸ δεύτερον τμῆμα καὶ χωρίζομεν τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα, τοὺς δὲ ἄλλους πρὸς ἀριστερὰν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος χαρακτῆρος τῆς ῥίζης καὶ λαμβάνομεν πηλίκον τὸν δεύτερον χαρακτῆρα αὐτῆς.

Γράφομεν τὸν νέον τοῦτον χαρακτῆρα πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τοῦ προευρεθέντος καὶ πολυπλασιαστήν, πολυπλασιάζομεν, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον ἀκολουθούμενον ἀπὸ τὸ δεύτερον τμῆμα.

Πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ νέου ὑπολοίπου καταβιβάζομεν καὶ τὸ τρίτον τμῆμα καὶ χωρίζομεν τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα, τὸ δὲ πρὸς ἀριστερὰν μέρος διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τῆς προευρεθείσης ῥίζης καὶ οὕτω λαμβάνομεν καὶ τὸν τρίτον χαρακτῆρα τῆς ζητουμένης. Παρομοίως δὲ γράφομεν τὸν νέον χαρακτῆρα πλησίον τοῦ διπλασίου καὶ πολυπλασιαστήν, πολυπλασιάζομεν καὶ ἀφαιροῦμεν, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν αὐτὴν σειρὰν τῶν πράξεων, ἑωσότου καταβιβάσαντες καὶ τὸ τελευταῖον τμῆμα ἐκτελέσωμεν καὶ τὴν τελευταίαν ἀφαίρεσιν.

217. Συμβαίνει ἐνίοτε, καταβιβαζομένου ἑνός τινος τμήματος καὶ χωριζομένου τοῦ τελευταίου χαρακτῆρος, νὰ προσδιορίζεται τὸ λοιπὸν τοῦ ἀριθμοῦ μέρος μικρότερον τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης καὶ οὕτω νὰ κωλύεται ἡ διαίρεσις. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην φανερόν, ὅτι δὲν ὑπάρχουσιν εἰς τὸν ῥίζαν μονάδες τοιαύτης τάξεως· διὰ τοῦτο γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν καταβιβάζοντες καὶ τὸ ἑπόμενον τμῆμα. Ὅθεν προσδιορίζομεν τὸν ἐφεξῆς χαρακτῆρα τῆς ῥίζης.

Φέρ' εἰπεῖν, εἰς τὸ προκείμενον παράδειγμα καταβιβάσαντες τὸ τμῆμα 84 πλησίον τοῦ ὑπολοίπου 1 καὶ χωρίσαντες τὸν τελευταῖον χαρακτῆρα 4 ἐλάβομεν διαιρετέον 18 μικρότερον τοῦ 46, διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης 23· ἐγράψαμεν διὰ τοῦτο 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἐλλειπουσῶν δεκάδων τῆς ῥίζης καὶ προχωρήσαντες εἰς τὴν πρᾶξιν εὕρομεν καὶ τὸν χαρακτῆρα 4 τῶν ἁπλῶν μονάδων τῆς ῥίζης.

5308416	2304
130	43
: : 1841,6	3
00000	
	4604
	4
	18416

218. Λαμβάνομεν ὡς τελευταῖον παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 127173, ὅστις δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἐφαρμόζοντες καὶ ἐνταῦθα τὸν ἀποδοθέντα κανόνα εὑρίσκομεν ῥίζαν 356 καὶ τελευταῖον ὑπόλοιπον 437. Εἰς τὴν περίστασιν ταύτην φανερὸν, ὅτι ὁ δεδομένος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον· ἡ δὲ εὑρεθεῖσα ῥίζα 356 εἶναι ἡ τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου 126736, τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν δεδομένον ἀριθμὸν, ἢ ἄλλως ὁ ἀριθμὸς 127173 περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 126736 τετραγώνου τοῦ 356 καὶ τοῦ 127449, τετραγώνου τοῦ 357· αἱ ῥίζαι αὗται λέγονται ἀσύμμετροι, καὶ μέχρι τοῦδε μὲν ἐξετιμήθησαν ὡς ἔγγιστα μονάδος, ἐφεξῆς δὲ θέλομεν διαλάβει περὶ τῆς ἐκτιμήσεως αὐτῶν καθ' οἱονδήποτε βαθμὸν προσεγγίσεως πρὸς τὸ ἀκριβές.

127173	356
37,1	65
467,3	5
437	706
	6
	4236

Ἐπειδὴ τὰ ὑπόλοιπα, τόσον τὰ τελευταῖα, ὅσον καὶ κατὰ τὸ μέσον τῆς πράξεως, τὰ ὁποῖα δίδουσιν αἱ μερικαὶ ἀφαιρέσεις, πολλάκις εἶναι ἱκανῶς μεγάλοι ἀριθμοὶ, καὶ ὡς ἐκ τούτου συμβαίνει νὰ ἀμφιβάλωμεν, μήπως ἔπρεπε νὰ γράψωμεν εἰς τὴν ῥίζαν χαρακτῆρα ἀνώτερον κατὰ μονάδα, ἔχομεν διὰ τοῦτο ἀσφαλῆ ὁδηγὸν τὴν παρατήρησιν τοῦ ἀριθμοῦ 212, διὰ τῆς ὁποίας πληροφορούμεθα, ἂν εὑρεθέν τι ὑπόλοιπον ἦναι πραγματικῶς τοιοῦτον. Διότι κατὰ τὴν ἀρχὴν ταύτην, πᾶν ὑπόλοιπον πρέπει νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, ηὐξημένου κατὰ μονάδα, ὡς συμβαίνει εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα.

Χαρακτηριστικὰ τῶν ἀσυμμέτρων τετραγωνικῶν ῥιζῶν.

219. Ὑπάρχουσι τεκμήρια, διὰ τῶν ὁποίων γνωρίζομεν ἐκ πρώτης ὄψεως, ὅτι δεδομένος τις ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, χωρὶς νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς ἐξαγωγῆς· εἶναι δὲ τὰ ἑξῆς:

Α'. Πᾶς ἄρτιος ἀριθμὸς, ὢν τέλειον τετράγωνον, πρέπει νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4.

Διότι ἡ ῥίζα ἀριθμοῦ ἀρτίου, οὖσα ὡσαύτως ἄρτιος ἀριθμὸς, ἐκφράζεται διὰ τοῦ γενικοῦ τύπου 2ν, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον $4\nu^2$ προφανῶς διαιρεῖται διὰ τοῦ 4.

Ἐκ τούτου ὁ ἄρτιος ἀριθμὸς, 156354, ἢ ἕτερός τις τοιοῦτος, μὴ ἔχων τὸ χαρακτηριστικὸν τῆς διαιρετότητος διὰ τοῦ 4 (ἀριθ. 184), δὲν ἔχει ῥίζαν ἀριθμὸν ἄρτιον· καὶ ἐπειδὴ, καθὸ διαιρούμενος διὰ τοῦ 2, δὲν ἔχει οὔτε περιττὸν, ἄρα ἡ ῥίζα αὐτοῦ δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὁλοσχερῶς, καὶ ὡς ἐκ τούτου ὁ δεδομένος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

220. Β΄. Πᾶς ἀριθμὸς περιττὸς, ὢν τέλειον τετράγωνον, πρέπει ἐλαττούμενος κατὰ μονάδα νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4.

Διότι ἡ ῥίζα ἀριθμοῦ περιττοῦ πρέπει ὡσαύτως νὰ ἦναι περιττὸς ἀριθμὸς, ὑποβαλλόμενος εἰς τὸν γενικὸν τύπον $2\nu+1$ (ἀριθ. 184). Ἑπομένως τὸ τετράγωνον αὐτῆς $(2\nu+1)^2=4\nu^2+4\nu+1$, ἐλαττούμενον κατὰ μονάδα, δίδει ἀριθμὸν, συνιστάμενον ἐκ τῶν τετραπλασίων $4\nu^2$ καὶ 4ν, καὶ διὰ τοῦτο διαιρετὸν διὰ τοῦ 4.

Κατὰ τὴν παρατήρησιν ταύτην ὁ ἀριθμὸς 35679 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Ἐπειδὴ ἀφαιρουμένης τῆς μονάδος, προκύπτει 35678, μὴ διαιρούμενος διὰ τοῦ 4.

221. Γ΄. Ἐν γένει, ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῆται διὰ πρώτου τινὸς παράγοντος α, οὐχὶ δὲ καὶ διὰ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ α^2, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Διότι, ἢ ὁ παράγων οὗτος ὑπῆρχεν εἰς τὴν ῥίζαν καὶ τότε εἰς τὸ τετράγωνον ὤφειλε νὰ εὑρεθῇ εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν, ἢ ἂν δὲν ὑπῆρχεν, δὲν ἔπρεπε νὰ εἰσέλθῃ οὔτε εἰς τὸ γινόμενον αὐτῆς ἐφ᾽ ἑαυτὴν, τουτέστιν εἰς τὸ τετράγωνον (ἀριθ. 178).

Ἐκ τούτου ἀριθμὸς, διαιρούμενος διὰ τοῦ 3, οὐχὶ δὲ διὰ τοῦ 9, ἢ διαιρούμενος διὰ τοῦ 5, οὐχὶ δὲ καὶ διὰ τοῦ 25 κτλ. δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

222. Δ΄. Πᾶς ἀριθμὸς λήγων εἰς 2, 3, 7, 8, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Διότι ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ τετραγώνου παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ δύο πρῶτα μέρη, τουτέστι τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων καὶ τὸ διπλοῦν τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, καθὸ ἀκολουθούμενα, τὸ μὲν ὑπὸ δύο, τὸ δὲ ὑφ᾽ ἑνὸς μηδενικοῦ, προστιθέμενα μετὰ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων, δὲν λαμβάνουσι μέρος εἰς τὴν στήλην τῶν ἁπλῶν μονάδων. Ὥστε ἡ τελευταία στήλη μένει ἀποκλειστικῶς διὰ τὰς μονάδας τοῦ τετραγώνου τῶν ἁπλῶν μονάδων τῆς ῥίζης. Καὶ ἐπειδὴ ἐκ τοῦ πίνακος τῶν τετραγώνων τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν βλέπομεν, ὅτι οὐδὲν τούτων λήγει εἰς 2, 3, 7 καὶ 8, ἄρα μένει ἄπορον, ὁποῖός τις εἶναι ὁ χαρακτὴρ τῶν μονάδων τῆς ῥίζης τοῦ προτιθεμένου ἀριθμοῦ, ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν δύναται νὰ ἦναι τέλειον τετράγωνον.

223. Ε΄. Πᾶς ἀριθμὸς λήγων εἰς 5 καὶ ἔχων χαρακτῆρα δεκάδων ἄλλον τινὰ, ἢ τὸν 2, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Διότι ὁ ἀριθμὸς, φέρ᾽ εἰπεῖν, 9875, διαιρούμενος διὰ τοῦ 5, πρέπει νὰ ἔλαβε τὸν παράγοντα τοῦτον ἐκ τῆς ῥίζης. Οὕτως ἡ ῥίζα, διαιρουμένη διὰ τοῦ 5, πρέπει νὰ λήγῃ εἰς 5, τὸ μόνον χαρακτηριστικὸν, τὸ ὁποῖον συμβιβάζεται εἰς τὴν παροῦσαν περίςασιν. Τούτου τεθέντος, τὰ δύο πρῶτα μέρη τοῦ τετραγώνου, τουτέστι τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων καὶ τὸ διπλοῦν τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας ἔχουσι δύο μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος· ὅθεν προστιθέμενα μετὰ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων δὲν λαμβάνουσι μέρος εἰς τὰς δύο στήλας τὴν τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ τὴν τῶν δεκάδων, τὰς ὁποίας ἀποκλειστικῶς ἀφίνουσιν εἰς τὸ τετράγωνον τῶν 5 μονάδων τῆς ῥίζης. Οὕτω μόνος ὁ 25 πρέπει νὰ πληροῖ τὰς δύο ταύτας τελευταίας θέσεις.

224. ς'. Τέλος ἀριθμὸς ἔχων ἐν τῷ τέλει ἕν, τρία, καὶ ἐν γένει περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Τοῦτο εἶναι φανερόν· διότι, ἂν ἡ ῥίζα αὐτοῦ ὑπῆρχεν ἀκριβὴς, ἔπρεπε νὰ λήγῃ εἰς ἓν ἢ περισσότερα μηδενικά. Ἀλλὰ τότε τὸ τετράγωνον αὐτῆς ἔπρεπε νὰ ἔχῃ δὶς τόσα μηδενικὰ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον ὑποθέσεως.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης διὰ προσεγγίσεως.

225. Ἡ ῥίζα ἀτελοῦς τετραγώνου μὴ παριστανομένη δι' οὐδενὸς ἀριθμοῦ ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ, (ἀριθ. 211) δὲν ἔχει φανερὰν σχέσιν πρὸς τὴν μονάδα καὶ ὡς ἐκ τούτου λέγεται ἀσύμμετρος. Ἀλλ' ἐν τοσούτῳ, ἐπειδὴ εὑρίσκεται μεταξὺ δύο κατὰ μονάδα διαφερόντων ἀριθμῶν, ὡς φέρ' εἰπεῖν ἡ τοῦ 45 εἶναι μεταξὺ τοῦ 6 καὶ 7, ἐννοοῦμεν πάντοτε, ὅτι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τούτων ὑπάρχει ποσότης τις, ἡ ὁποία πολυπλασιαζομένη ἐφ' ἑαυτὴν παράγει τὸ ἀτελὲς τετράγωνον, οἷον τὸν ἀριθμὸν 45· τὴν ποσότητα ταύτην δὲν δυνάμεθα μὲν νὰ προσδιορίσωμεν ἀκριβῶς δυνάμεθα ὅμως νὰ περικλείσωμεν εἰς στενώτατα ὅρια, καὶ οὕτως ἐκλαμβάνοντες ἓν τῶν ὁρίων τούτων ἀντὶ τῆς ζητουμένης ῥίζης, ἐκτιμῶμεν αὐτὴν ὅσον θέλομεν ὡς ἔγγιστα τῆς ἀκριβείας.

Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι κλασματικοῦ τινος ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ τετράγωνον $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ λαμβάνεται, τετραγωνιζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαςοῦ· ὅθεν συμπεραίνομεν καὶ τὴν ἀντίςροφον πρότασιν· ἵνα ἐπιστρέψωμεν ἀπὸ τοῦ κλασματικοῦ τετραγώνου εἰς τὴν ῥίζαν, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τὴν τοῦ παρονομαστοῦ καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὴν πρώτην διὰ τῆς δευτέρας.

Τούτου τεθέντος, ἔστω ἀριθμός τις α, τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, διαφέρουσαν τοῦ ἀκριβοῦς κατὰ ποσότητα μικροτέραν τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\nu}$

Πολυπλασιάζοντες καὶ διαιροῦντες τὸν δεδομένον ἀριθμὸν α ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ ν τρέπομεν τὸν ἀριθμὸν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\alpha\nu^2}{\nu^2}$, τουτέστιν $\alpha = \frac{\alpha\nu^2}{\nu^2}$· καὶ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑκατέρου μέλους ἔχομεν $\sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{\alpha\nu^2}{\nu^2}} = \frac{\sqrt{\alpha\nu^2}}{\nu}$. Σημειοῦντες δὲ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ $\alpha\nu^2$ διὰ ρ βλέπομεν φανερῶς ὅτι ἡ ῥίζα $\sqrt{\alpha\nu^2}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ ρ καὶ $\rho+1$, τὸ δὲ τετράγωνον μεταξὺ τοῦ ρ^2 καὶ $(\rho+1)^2$.

Ὅθεν ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς α ἴσος μὲ $\frac{\alpha\nu^2}{\nu^2}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ $\frac{\rho^2}{\nu^2}$ καὶ $\frac{(\rho+1^2)}{\nu^2}$ ἡ δὲ ῥίζα αὐτοῦ $\sqrt{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha\nu^2}}{\nu}$ περιέχεται μεταξὺ τοῦ $\frac{\rho}{\nu}$ καὶ $\frac{\rho+1}{\nu}$, διαφέρουσα τοῦ ἀκριβοῦς ὀλιγώτερον τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ὁρίων $\frac{1}{\nu}$.

Ἐκ τούτου ἐξάγεται ὅτι, ὅπως εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ ὡς ἔγγιστα τινὸς ὁρίου, πολυπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ὁρίου, ἐξάγομεν τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ γινομένου καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ὁρίου.

226. Ἐξαχθήτω π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 35 ὡς ἔγγισα $\frac{1}{12}$· πολυπλασιάζοντες 35 ἐπὶ 144, τετράγωνον τοῦ 12, λαμβάνομεν 5040, καὶ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ ὡς ἔγγιστα μονάδος προσδιορίζομεν διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτῆς 70. Ὅθεν $\frac{70}{12}$ ἢ $\frac{71}{12}$ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 35 ὡς ἔγγιστα $\frac{1}{12}$.

Παρομοίως $\sqrt{11} = \frac{\sqrt{11 \times 20^2}}{20} = \frac{\sqrt{4400}}{20} = \frac{66}{20} = 3\frac{6}{20}$ ὡς ἔγγιστα $\frac{1}{20}$.

Καὶ $\sqrt{223} = \frac{\sqrt{356800}}{40} = \frac{597}{40} = 14\frac{37}{40}$ ὡς ἔγγιστα $\frac{1}{40}$ κτλ.

227. Ἡ ἐκτίμησις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εἰς δεκαδικὸν κλάσμα, ἥτις εἶναι καὶ ἡ μᾶλλον εὔχρηστος, εἶναι συνέπεια τοῦ ἀνωτέρω κανόνος.

Τῷ ὄντι, ἵνα λάβωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος ὡς ἔγγιστα $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, κτλ., πρέπει κατὰ τὸν κανόνα νὰ πολυπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ $(10)^2$, $(100)^2$ κτλ. νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ ὡς ἔγγιστα μονάδος, καὶ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ὁρίου 10, 100, κτλ. Τοῦτο γίνεται, ἂν γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ δὶς τόσα μηδενικά, ὅσους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας ζητοῦμεν εἰς τὴν ῥίζαν, ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ προκύπτοντος τούτου ἀριθμοῦ καὶ δι' ὑποδιαστολῆς χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῆς, ὅσους ἐζητήσαμεν δεκαδικοὺς χαρακτῆρας.

Ἔστω π. χ. νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 7 ὡς ἔγγιστα 0,001, ἤτοι $\frac{1}{1000}$. Γράφοντες πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 7 ἓξ μηδενικὰ ἔχομεν 7000000, ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ ὡς ἔγγιστα μονάδος εὑρίσκομεν 2645 καὶ τέλος χωρίζοντες πρὸς τὰ δεξιὰ τρεῖς δεκαδικοὺς χαρακτῆρας εὑρίσκομεν 2,645 ῥίζαν τοῦ 7 μεῖον 0,001.

7000000	2,645
30,0	46
240,0	6
3040,0	524
3975	4
	5285
	5

Ὡσαύτως $\sqrt{29} = 5,38$ ὡς ἔγγιστα 0,01.

$\sqrt{227} = 15,0665$ ὡς ἔγγιστα 0,0001. κτλ.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν κλασμάτων.

228. Ἔστω κλασματικός τις ἀριθμὸς $\frac{α}{β}$, τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν. Πολυπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν β τρέπομεν αὐτὸν κατὰ πρῶτον ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{αβ}{β^2}$. Τούτου τεθέντος, $\sqrt{\frac{α}{β}}$ ἴση μὲ $\sqrt{\frac{αβ}{β^2}}$, ἰσοῦται μὲ $\frac{\sqrt{αβ}}{β}$. Ὅθεν σημειοῦντες διὰ ρ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμητοῦ αβ εὑρίσκομεν τὰ δύο ὅρια $\frac{ρ}{β}$ καὶ $\frac{ρ+1}{β}$, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἡ τε-

τραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{\alpha\beta}{\beta^2}$ ἢ τοῦ προταθέντος $\frac{\alpha}{\beta}$· ὥστε $\frac{\rho}{\beta}$ εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα μεῖον $\frac{1}{\beta}$.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὁ κανών. Πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης κοινοῦ τινος κλασματικοῦ ἀριθμοῦ πολυπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν, καὶ οὕτω καθιστῶμεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ τέλειον τετράγωνον· ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ νέου τούτου ἀριθμητοῦ ὡς ἔγγιστα μονάδος καὶ διαιροῦμεν αὐτὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

229. Ἔστω π. χ. νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ κλάσματος $\frac{7}{13}$.

Πολυπλασιάζοντες ἐπὶ 13 λαμβάνομεν τὸ νέον κλάσμα $\frac{7\times 13}{13^2}=\frac{91}{13^2}$.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ῥίζα τοῦ ἀριθμητοῦ ὡς ἔγγιςα μονάδος εἶναι 9 ἄρα $\frac{9}{13}$ εἶναι ἡ ῥίζα τοῦ $\frac{7}{13}$ μεῖον $\frac{1}{13}$.

Ἐὰν δε θέλωμεν ἔτι μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως ἐξάγομεν τὴν τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ ὡς ἔγγιστα μονάδος δεκαδικῆς τινος ὑποδιαιρέσεως. Οὕτω π. χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω ὑπόδειγμα ἐξάγοντες τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ 91 ὡς ἔγγιστα 0, 01 εὑρίσκομεν

$\sqrt{91}=9,53$ ὅθεν $\sqrt{\frac{7}{13}}$ ἰσοῦται μὲ $\frac{9{,}53}{13}=\frac{953}{1300}$ μεῖον $\frac{1}{1300}$.

230. Ἐὰν ὁ παρχνομαστὴς τοῦ κλάσματος περιέχῃ παράγοντά τινα τέλειον τετράγωνον, τότε συμφέρει μᾶλλον νὰ πολυπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ μόνον τὸν παράγοντα, ὅστις δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Διότι διὰ τοῦ μέσου τούτου ἁπλουστεύονται οἱ ὑπολογισμοί.

Ἔσω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{23}{48}$. Ἐπειδὴ ὁ παρονομαςὴς 48 ἴσος μὲ 16×3, ἐμπεριέχει τὸ τετράγωνον 16, ἀρκεῖ νὰ πολυπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ 3. Οὕτω δὲ τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{69}{144}$ ἔχει τὸν παρονομαςὴν αὐτοῦ τέλειον τετράγωνον. Ὅθεν ἐξάγοντες τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ 69 μεῖον 0,1 εὑρίσκομεν 8, 3 καὶ ἐπομένως ἡ ῥίζα τοῦ κλάσματος $\frac{23}{48}$ ἴσον μὲ $\frac{69}{144}$ εἶναι $\frac{8{,}3}{12}$ ἢ $\frac{83}{120}$ ὡς ἔγγιστα $\frac{1}{120}$.

231. Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων συνάγεται ἀπὸ τὰς αὐτὰς ἀρχὰς τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως· διευκολύνεται δὲ ἐπὶ μᾶλλον ἡ πρᾶξις διὰ τὰ πλεονεκτήματα τῆς δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ ἡ ὑποδιαστολὴ ἐπέχει τόπον παρονομαστοῦ, ἐκφραζομένου διὰ τῆς μονάδος, ἀκολουθουμένης ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσοι εἶναι οἱ χαρακτῆρες τοῦ κλάσματος· καὶ ἐπειδὴ τοιοῦτός τις παρονομαστὴς εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὁσάκις ἔχει ἄρτιον ἀριθμὸν μηδενικῶν· ἕπεται ἄρα, ὅτι ὁ δεδομένος κλασματικὸς ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἐκφρασθῇ δι' ἀρτίου ἀριθμοῦ δεκαδικῶν χαρακτήρων. Τούτου γενομένου, ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν αὐτοῦ ὡς ἔγγιστα μονάδος πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ὁποίας χωρίζομεν τὸν ἁρμόδιον ἀριθμὸν δεκαδικῶν χαρακτήρων.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 3,425, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ῥίζαν ὡς ἔγγιστα 0,01.

Προσγράφοντες κατὰ πρῶτον τὸ μηδενικὸν λαμβάνομεν 3,4250, ἤτοι $\frac{34250}{10000}$ κλασματικὸν ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι τέλειον τετράγωνον. Ἐξάγοντες δὲ τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ εὑρίσκομεν 185 ὡς ἔγγιστα μονάδος. Ὅθεν ἡ ῥίζα τοῦ προτεθέντος κλασματικοῦ εἶναι $\frac{185}{100}$, ἤτοι 1, 85.

Παρομοίως σκεπτόμενοι καὶ διὰ πᾶν ἄλλο παράδειγμα συμπεραίνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα. Ἵνα ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν δεκαδικοῦ κλάσματος, καθιστῶμεν ἄρτιον τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν αὐτοῦ χαρακτήρων, καὶ παρορῶντες τὴν ὑποδιαστολὴν ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν αὐτοῦ ὡς ἀκεραίου, καὶ χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς τόσους πρὸς τὰ δεξιὰ δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, ὅσα ἦσαν τὰ τμήματα τῶν δεκαδικῶν χαρακτήρων τοῦ ἀριθμοῦ· ὁ οὕτω δὲ προσδιοριζόμενος ἀριθμὸς εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα ὡς ἔγγιστα μονάδος τῆς τελευταίας δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον εὑρίσκομεν παρομοίως.

$\sqrt{0,05409}=0.23257$ ὡς ἔγγιστα 0, 00001

$\sqrt{31,027}=5,570$ μεῖον 0, 001

$\sqrt{0,01001}=0,10004$ μεῖον 0, 00001,

232. Ἐπειδὴ ἡ εἰς δεκαδικὸν κλάσμα ἐκτίμησις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εἶναι ἡ προτιμητέα, διὰ τοῦτο ἐφαρμόζομεν αὐτὴν καὶ εἰς τὰ κοινὰ κλάσματα καὶ ἐν γένει εἰς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς οἱουσδήποτε. Πρὸς τοῦτο τρέπομεν κατὰ πρῶτον τὸν προκείμενον κλασματικὸν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικὸν, καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου τούτου προάγομεν τὴν πρᾶξιν τῆς ἐξαγωγῆς ὡς ἔγγιστα μονάδος δεκαδικῆς τινος ὑποδιαιρέσεως.

Π. χ. Τὸ κλάσμα $\frac{11}{14}$, τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν, ἐκφράζεται διὰ τοῦ 0, 785714 ὡς ἔγγιστα 0, 000001.

Ὅθεν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ 0, 886 εἶναι καὶ ῥίζα τοῦ $\frac{11}{14}$ μεῖον 0, 001.

Ὁμοίως $\sqrt{2\frac{13}{15}}=\sqrt{\frac{43}{15}}=1,6931$ μεῖον $0,0001$.

Σύντομος μέθοδος τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

233. Ἐπειδὴ ἡ πρᾶξις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης καθίσταται ἐπιπονωτέρα, καθόσον διαδοχικῶς προάγεται ὁ ἀριθμὸς τῶν χαρακτήρων τῆς ῥίζης, ἡ δυσκολία δὲ αὕτη γίνεται μάλιστα ἐπαισθητὴ, ὅταν ζητῶμεν μακρόν τι ὅριον δεκαδικῆς προσεγγίσεως, εὑρέθη μέσον διὰ τοῦ ὁποίου ἀποφεύγομεν τὴν πολλὴν ὀχληρίαν τῶν μακρῶν ὑπολογισμῶν. Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης, ἀφ' οὗ κατὰ τὸν κοινὸν κανόνα εὕρωμεν πρῶτον τὸ ἥμισυ τῶν χαρακτήρων τῆς ῥίζης, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς λοιποὺς δι' ἁπλῆς διαιρέσεως.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 32976, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ῥίζαν μεῖον 0, 01· ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ εἶναι 181 μὲ ὑπόλοιπον 215. Ἵνα λάβωμεν ἤδη τοὺς δύο δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, διαιροῦμεν τὸν 215 διὰ τοῦ 362, διπλασίου τοῦ 181 καὶ τὸ πηλίκον 59 ἐκφράζει τὰ ἑκατοστημόρια τῆς ῥίζης, ὡς προσδιορίζομεν καὶ διὰ τῆς ἑρμηνευθείσης μεθόδου.

234. Ἰδοὺ εἰς τί στηρίζεται ἡ ἀλήθεια τοῦ κανόνος τούτου.

Ἔστω Α ἀριθμός τις, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα πρέπει νὰ ἔχῃ $2\nu+1$ χαρακτῆρας· ἔστω α ἡ σχετικὴ τιμὴ τῶν $\nu+1$ πρώτων χαρακτήρων καὶ β ἡ τῶν ἐφεξῆς ν πρὸς τὰ δεξιά.

Κατὰ τὰς ὑποθέσεις ταύτας ἔχομεν $A=(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$· ἐξ οὗ $A-\alpha^2=2\alpha\beta+\beta^2$· καὶ διαιροῦντες διὰ 2α λαμβάνομεν

$$\frac{A-\alpha^2}{2\alpha}=\beta+\frac{\beta^2}{2\alpha}.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἀποδεικνύει, ὅτι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ μέρος $\frac{A-\alpha^2}{2\alpha}$ ἀντὶ τοῦ β ὡς ἔγγιστα μονάδος, ὁσάκις ἡ ποσότης $\frac{\beta^2}{2\alpha}$ εἶναι κλάσμα, ὡς εἰς τὴν παροῦσαν περίστασιν.

Διότι τὸ β^2 δύναται νὰ ἔχῃ τὸ πολὺ δὶς τόσους χαρακτῆρας, ὅσους ἔχει ἡ ῥίζα β, καὶ ἐπειδὴ ὑπεθέσαμεν $\beta<10\nu$, ἐκ τούτου καὶ $\beta^2<10^2\nu$, τουτέστι τὸ β^2 γράφεται διὰ χαρακτήρων 2ν τὸ πολύ. Ἐξ ἑτέρου δὲ ἡ τιμὴ τοῦ α, ἐκφραζομένη διὰ $\nu+1$ χαρακτήρων, σημαντικῶν καὶ διὰ ν μηδενικῶν, ὅσοι εἶναι οἱ χαρακτῆρες τοῦ β, γράφεται διὰ $2\nu+1$ χαρακτήρων. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ α καὶ κατὰ μείζονα λόγον τὸ διπλοῦν αὐτοῦ 2α εἶναι μεγαλήτερον τοῦ 10^2· καὶ πολλῷ πλέον τοῦ β^2· ὥστε $\frac{\beta^2}{2\alpha}$ εἶναι κλάσμα τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν.

235. Μερικεύοντες τὴν γενικὴν ταύτην ἀνάλυσιν ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 32976 ὡς ἔγγιστα ἑκατοστημορίου.

Τρέποντες αὐτὸν κατὰ πρῶτον εἰς μυριοστημόρια ἔχομεν· A = 329760000 μυριοστημόρια.

Καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς ἐξαγωγῆς εὑρίσκομεν τοὺς τρεῖς πρώτους χαρακτῆρας τῆς ῥίζης $\alpha=181$ μονάδες ἢ 18100 ἑκατοστημόρια.

Καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 18100 ἔχει ἕνα χαρακτῆρα περισσότερον τῶν τοῦ τετραγώνου τῶν ζητουμένων ἑκατοστημορίων 59. ἤτοι τοῦ β, διὰ τοῦτο τὸ μέρος $\frac{\beta^2}{2\alpha}$ ἤτοι $\frac{3481}{36200}$, εἶναι κύριον κλάσμα τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν.

Ἰδοὺ ἡ διάταξις τῆς πράξεως.

```
329760000  | 181,59
           ----------
22,9          28   361
  57,6         8     4
   21500,00 | 36200
            ---------
    3400      59
     142
```

Β΄. Παράδειγμα.

```
47,35,67,89,56 | 688   | 16
               -----------------
113,5             128    1368
 1116,7             8       8
     223
    2238956 | 137600
            ----------
     862956    16
      37356
```

τουτέστι $\sqrt{4735678956}=68816$ ὡς ἔγγιστα μονάδος.

Γ΄. Παράδειγμα. $\sqrt{\frac{17}{7}}=\sqrt{2,42857142\ldots\ldots}$

```
2,42,85,71,42 | 155 | 84
14,2             25    305
  178,5           5      5
    2607142 | 31000
            ---------
     127142   84
     . . 3142
```

τουτέστι $\sqrt{\frac{17}{7}}=\sqrt{2,42857142}=1,5584$ ὡς ἔγγιστα 0,0001.

§. 6΄. Ἐξαγωγὴ τῆς Κυβικῆς ῥίζης.

236. Ὁ μὲν σχηματισμὸς τοῦ κύβου ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ γίνεται διὰ δύο διαδοχικῶν πολυπλασιασμῶν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐφ' ἑαυτὸν, ὁ δὲ προσδιορισμὸς τῆς ῥίζης ἀπαιτεῖ ἰδιαιτέραν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ἐκθέτομεν δι' ἀναλόγου ἀναλύσεως πρὸς τὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζαν.

Οἱ κῦβοι τῶν δέκα πρώτων ἀριθμῶν·

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
εἶναι 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

Ἀπὸ τοῦ πίνακος τούτου ἀναγνωρίζομεν ἀμέσως.

Α΄. Ὅτι ὁ κύβος ἑνὸς χαρακτῆρος ἐκφράζεται τὸ πολὺ διὰ τριῶν χαρακτήρων, ὡς μαρτυρεῖ ὁ κύβος τοῦ 9 ἴσος μὲ 729, καὶ ὅτι ἀριθμὸς, ἐκφραζόμενος διὰ περισσοτέρων ἢ τριῶν χαρακτήρων, ἔχει διὰ κυβικὴν ῥίζαν ἀριθμὸν, συνιστάμενον τοὐλάχιστον ἐκ δύο χαρακτήρων, ὡς μαρτυρεῖ ὁ ἀριθμὸς 1000, ὁ μικρότερος τῶν ἐκ τεσσάρων χαρακτήρων, ἔχων ῥίζαν κυβικὴν τὸν 10.

237. Β΄. Μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ὀλίγοι εἶναι οἱ τέλειοι κῦβοι, ὡς μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 999 εὑρίσκονται μόνον ἐννέα· οἱ ἄλλοι δὲ ἔχουσι ῥίζαν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν· π. χ. ὁ 76, περιεχόμενος μεταξὺ τοῦ 64 καὶ 125, ἔχει κυβικὴν ῥίζαν μεταξὺ τοῦ 4 καὶ 5. Ἀλλ' ἡ ῥίζα αὕτη δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ἐπ' ἀκριβὲς οὔτε κλασματικῶς, καὶ διὰ τοῦτο λέγεται ἀσύμμετρος.

Ἡ ἀπόδειξις αὕτη εἶναι ὁμοία μὲ τὴν τοῦ ἀριθ. 211. Διότι ἔσω, φέρ' εἰπεῖν κυβικὴ ῥίζα τοῦ 76 ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{\alpha}{\beta}$, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι α καὶ β ἀναγκαίως πρέπει νὰ ὑποτεθῶσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν πρέπει νὰ ἔχωμεν $\sqrt[3]{76}=\frac{\alpha}{\beta}$, πρέπει καὶ οἱ κῦβοι νὰ ἦναι ἴσοι τουτέστιν $76=\frac{\alpha^3}{\beta^3}$· ἀλλὰ οἱ ὅροι α^3 καὶ β^3 εἶναι ὡσαύτως πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἄρα ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{\alpha^3}{\beta^3}$ εἶναι ἀνάγωγος εἰς ὁλοσχερῆ καὶ ἑπομένως ἄτοπος ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ πρὸς τὸν ἀκέραιον 76· ὅθεν $\frac{\alpha}{\beta}$ δὲν εἶναι ἀκριβὴς κυβικὴ ῥίζα 76. Τὰς ῥίζας ταύτας ἐφεξῆς θέλομεν ἐκτιμήσει διὰ προσεγγίσεως οἱασδήποτε.

238. Γ΄. Ἡ διαφορὰ δύο κύβων ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ μονάδα αὐξάνει κατὰ λόγον τοῦ μεγέθους τῶν ῥιζῶν, ἔχει δὲ σταθερὸν νόμον τὸν ἑξῆς.

Ἔστωσαν δύο διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ $\alpha+1$, οἱ κῦβοι αὐτῶν θέλουσιν εἶσθαι τοῦ μὲν πρώτου $\alpha\times\alpha\times\alpha=\alpha^3$, τοῦ δὲ δευτέρου $(\alpha+1)^2(\alpha+1)=(\alpha^2+2\alpha+1)(\alpha+1)=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$. Ὅθεν ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι $3\alpha^2+3\alpha+1$· τουτέστιν ἡ διαφορὰ δύο κύβων ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ μονάδα ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλοῦν τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου πλέον τοῦ τριπλασίου τοῦ μικροτέρου πλέον ἑνός.

Π. χ. $9^3-8^3=3\cdot 8^2+3\cdot 8+1=192+24+1=217$.

Καὶ τῷ ὄντι $9^3-8^3=279-512=217$.

Ὁμοίως $(90)^3-(89)^3=3\cdot 89^2+3\cdot 89+1=23763+267+1=24031$.

Εἰς δὲ τοὺς μεγαλητέρους ἀριθμοὺς εἶναι ἔτι μεγαλητέρα.

239. Μεταβαίνοντες ἤδη εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης προτάσσομεν κατὰ πρῶτον τὸν σχηματισμὸν τοῦ κύβου ἀριθμοῦ, ἔχοντος μονάδας καὶ δεκάδας, ἤτοι τὸ ἀνέλιγμα τοῦ δυωνύμου $(\alpha+\beta)^3$.

Πολυπλασιάζοντες κατὰ πρῶτον,	$\alpha+\beta$
ἐπὶ τὸν αὐτὸν	$\alpha+\beta$
λαμβάνομεν τὸ τετράγωνον	$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
Πολυπλασιάζοντες δὲ καὶ πάλιν ἐπὶ	$\alpha+\beta$
λαμβάνομεν τὸν κύβον	$\left\{\begin{array}{l}\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2\\ \quad+\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3\end{array}\right.$
καὶ δι' ἀναγωγῆς	$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Ἐκ τοῦ γενικοῦ τούτου τύπου προκύπτει, ὅτι ὁ κῦβος ἀριθμοῦ, συνισταμένου ἐκ μονάδων καὶ δεκάδων, ἰσοῦται μὲ τὸν κῦβον τῶν δεκάδων πλέον τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας πλέον τοῦ τριπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων πλέον τοῦ κύβου τῶν μονάδων.

Π. χ. $(47)^3=(40+7)^3$ δίδει

$$\begin{array}{rcr}
\alpha^3=(40)^3 & = & 64000\\
3\alpha^2\beta=3(40)^2\times 7 & = & 33600\\
3\alpha\beta^2=3\times 40\times 7^2 & = & 5880\\
\beta^3=7^3 & = & 343\\
\hline
\end{array}$$

Ὅθεν $(47)^3=(40+7)^3=(\alpha+\beta)^3=103823$

Καὶ τῷ ὄντι $47\times 47\times 47=103823$.

240. Ἵνα ἐπιστρέψωμεν ἤδη ἀπὸ τοῦ κύβου 103823 εἰς τὴν ῥίζαν, ὑποσρώνομεν τὸν ἑξῆς πίνακα τῶν πράξεων κατὰ τὴν ἑπομένην ἀνάλυσιν.

103,023	47	47	2209
64	48	47	47
398,23		329	15463
		188	8836
		2209	103824

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 103823 ἔχει ὑπὲρ τοὺς τρεῖς χαρακτῆρας, ἄρα καὶ ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἔχει μονάδας καὶ δεκάδας. Καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὸ ἀνέλιγμα τοῦ δυωνύμου ὁ κῦβος τῶν δεκάδων εἶναι χιλιάδες, ἐμπεριληφθεῖσαι ἐντὸς τῶν 103 χιλιάδων τοῦ ἀριθμοῦ· διὰ τοῦτο ζητοῦμεν κατὰ πρῶτον τὸν μεγαλήτερον κῦβον 64, τὸν περιεχόμενον εἰς τὸ τμῆμα τῶν χιλιάδων, καὶ ἡ ῥίζα αὐτοῦ 4 εἶναι αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης, τὰς ὁποίας γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἀφαιροῦντες τὸν κῦβον 64 ἀπὸ τοῦ τμήματος 103 λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 39 χιλιάδας, παρὰ τῷ ὁποίῳ καταβιβάζοντες καὶ τὸ ἕτερον τμῆμα λαμβάνομεν ὅλον ὑπόλοιπον 39823, τὸ ὁποῖον περιέχει τὰ τρία ἄλλα μέρη τοῦ κύβου τοῦ δυωνύμου, τουτέστι τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, τὸ τριπλάσιον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων καὶ τὸν κῦβον τῶν μονάδων.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας δὲν ἔχει σημαντικὸν χαρακτῆρα κάτωθι τῶν ἑκατοντάδων καὶ ἑπομένως προστεθὲν μετὰ τῶν ἄλλων μερῶν δὲν ἔλαβε θέσιν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων καὶ μονάδων, διὰ τοῦτο χωρίζομεν τοὺς δύο τελευταίους χαρακτῆρας 23· εἰς τὸ λοιπὸν δὲ μέρος πρὸς ἀριστερὰν 398 ἐμπεριέχεται ὁλόκληρον τὸ μέρος τοῦτο.

Τούτου τεθέντος, διαιροῦντες τὸν 398 διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν 4 δεκάδων, τουτέστι διὰ τοῦ 48, εὑρίσκομεν πηλίκον 8 ὡς χαρακτῆρα τῶν μονάδων τῆς ῥίζης. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ὁ χαρακτὴρ οὗτος εἶναι ἀνώτερος, ὡς βεβαιούμεθα ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ κύβου τοῦ 48, γράφομεν διὰ τοῦτο 7. Τόσαι δὲ εἶναι αἱ μονάδες τῆς ῥίζης.

Εὑρόντες διὰ τῆς διαιρέσεως τὸν χαρακτῆρα 7 τῶν μονάδων, ἠδυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν τριῶν μερῶν, τουτέστι σχηματίζοντες τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, ὁμοίως τὸ τριπλάσιον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων καὶ τὸν κῦβον τῶν μονάδων καὶ προσθέτοντες τὰ τρία μέρη, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα θέλει εἶσθαι 39823, ὡς ἐπράξαμεν ἀναλόγως καὶ ἐπὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης· ἀλλὰ δια τὸ πολύπλοκον τῶν ὑπολογισμῶν προτιμῶμεν μᾶλλον τὸν σχηματισμὸν τοῦ κύβου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης 47, τὸν ὁποῖον συγκρίνομεν ἀμέσως πρὸς τὸν προταθέντα ἀριθμὸν δι᾽ ἁπλῆς ἀφαιρέσεως.

Ἔστω ἤδη ὁ ἀριθμὸς 110592.

Διαστέλλοντες κατὰ πρῶτον τοὺς τρεῖς πρὸς δεξιὰν χαρακτῆρας ζητοῦμεν τὸν κύβον τῶν δεκάδων, τὸν περιεχόμενον εἰς τὰς 110 χιλιάδας. Ὅθεν εὑρίσκομεν 4 δεκάδας διὰ τὸν κύβον 64, καὶ ἀφαιροῦντες 64 ἀπὸ τοῦ 110 λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 46 χιλιάδας· καταβιβάζοντες δὲ καὶ τὸ ἐφεξῆς τμῆμα λαμβάνομεν ὅλον ὑπόλοιπον 46592, τὸ ὁποῖον περιέχει τὰ τρία ἄλλα μέρη τοῦ ἀνελίγματος. Καὶ ἐπειδὴ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας ἐμπεριέχεται ἐντὸς τῶν 465 ἑκατοντάδων, διαιροῦμεν διὰ τοῦτο διὰ τοῦ 48, τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων καὶ εὑρίσκομεν 8 διὰ χαρακτῆρα τῶν μονάδων.

Ἡ διαίρεσις αὕτη δὲν δίδει ἀκριβῶς ὡς πηλίκον τὸν ζητούμενον χαρακτῆρα, ἀλλὰ θεωρεῖται ὡς μέσον προσεγγίσεως· οὕτως ἐνταῦθα ἡ μὲν διαίρεσις τοῦ 465 διὰ τοῦ 48, δίδει μὲν πηλίκον 9, ἀλλὰ αἱ μονάδες τῆς ῥίζης εἶναι μόνον 8. Γνωρίζομεν δὲ, ὅτι ὁ χαρακτὴρ 9 εἶναι ἀνώτερος τοῦ τῶν μονάδων τῆς ῥίζης· καθότι, ἂν σχηματίσωμεν τὰ τρία ἄλλα μέρη τοῦ κύβου τοῦ διωνύμου, θέλομεν εὕρει ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ 46592, ἢ μᾶλλον ἂν ἀνακυβήσωμεν τὸν 49, εὑρίσκομεν ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ δεδομένου.

Ἕπεται ἡ πρᾶξις

```
110,592 | 48
 64       48      48×48×48=110592.
 465,92
 110592
 000000
```

241. Δι' ἀναλόγου ἀναλύσεως εὑρίσκομεν τὴν ῥίζαν ἀριθμῶν, συνισταμένων ἐξ ὁσωνδήποτε χαρακτήρων, ὡς εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

```
258474853 | 637
216          3 6²=108
 424 | 108
 324    3    63³=63×63×63=250047
 100
250047       3 (63)²=11097
  84278 | 11907
            7        (637)³=258474853
 258474853
```

. . . . .

Χωρίζοντες κατὰ πρῶτον τὸ τμῆμα τῶν μονάδων ζητοῦμεν τὴν ῥίζαν τοῦ ὑπολοίπου μέρους 258474, εἰς τὸ ὁποῖον ἐμπεριέχεται ὁ κῦβος τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης. Καὶ ἐπειδὴ τὸ μέρος τοῦτο ἔχει ἓξ χαρακτῆρας, ἄρα εἰς τὴν ῥίζαν αὐτοῦ ὑπάρχουσι δύο· εὑρίσκομεν λοιπὸν αὐτοὺς κατὰ πρῶτον, κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀνάλυσιν, καὶ οὕτως ἔχομεν 63 δεκάδας εἰς τὴν ῥίζαν· σχηματίζοντες δὲ τὸν κῦβον τοῦ 63 ἀφαιροῦμεν αὐτὸν ἀπὸ τῶν χιλιάδων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ καὶ λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 8427, παρὰ τῷ ὁποίῳ καταβιβάζομεν καὶ τὰς 8 ἑκατοντάδας καὶ ἔχομεν 84278 ἑκατοντάδας, καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ 11907 τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν 63 δεκάδων προσδιορίζομεν 7 μονάδας τῆς ῥίζης. Καὶ τῷ ὄντι ἀνακυβοῦντες τὸν 637 εὑρίσκομεν τὸν προταθέντα ἀριθμόν.

242. Δι' ἐπαγωγικοῦ συλλογισμοῦ ἀποδεικνύομεν ὡσαύτως, ὅτι τέμνομεν εἰς τέσσαρα, πέντε, ἢ περισσότερα τμήματα, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ πολλοὺς χαρακτῆρας καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀνάλυσιν. Ὅθεν δυνάμεθα νὰ συστήσωμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

Ἵνα ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ἀρχόμενοι δεξιόθεν τέμνομεν αὐτὸν κατὰ τμήματα ἐκ τριῶν χαρακτήρων· τὸ πρῶτον πρὸς ἀριστερὰν δυνατὸν νὰ ἔχῃ καὶ δύο ἢ καὶ ἕνα χαρακτῆρα.

Ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου πρὸς ἀριστερὰν τμήματος καὶ τὸν κῦβον αὐτῆς ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ αὐτὸ τμῆμα πλησίον τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν καὶ τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ ἐφεξῆς τμήματος, καὶ διαιροῦντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης λαμβάνομεν τὸν δεύτερον χαρακτῆρα αὐτῆς.

Σχηματίζομεν τὸν κῦβον τῆς εὑρεθείσης ῥίζης καὶ ἀφαιροῦμεν αὐτὸν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν δύο τμημάτων. Εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον καταβιβάζομεν ὡσαύτως τὸν πρῶτον χαρακτῆρα τοῦ τρίτου τμήματος καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης.

Ἀκολουθοῦμεν παρομοίως τὴν αὐτὴν σειρὰν τῶν πράξεων νὰ σχηματίζωμεν κύβους, νὰ ἀφαιρῶμεν, νὰ καταβιβάζωμεν χαρακτῆρας καὶ νὰ διαιρῶμεν, ἑωσοῦ καταβιβάσωμεν καὶ τὸ τελευταῖον τμῆμα.

243. Συχνάκις εἰς τὴν ὁδὸν τῶν πράξεων συμβαίνει νὰ ἀμφιβάλλωμεν μήπως ἕν τι μικρὸν ὑπόλοιπον εἶναι ἀνώτερον τοῦ δέοντος, καὶ ἑπομένως ὁ εὑρεθεὶς χαρακτὴρ τῆς ῥίζης ἠδύνατο ἴσως νὰ αὐξηθῇ κατὰ μονάδα. Ἀλλὰ περὶ τούτου ἔχομεν ἀσφαλῆ ὁδηγὸν τὴν διαφορὰν δύο κύβων ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ μονάδα. Διότι, καθὰ παρετηρήσαμεν (ἀριθ. 238)· πᾶν ὑπόλοιπον θεωρεῖται ὡς τοιοῦτον, ὅταν ἦναι μικρότερον τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, πλέον τοῦ τριπλασίου τῆς ἰδίας καὶ πλέον ἑνός· τοῦτο λέγομεν καὶ περὶ τῶν ὑπολοίπων τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ἀτελῶν κύβων.

244. Κατὰ τὰ εἰρημένα εὑρίσκομεν παρομοίως.

$$\sqrt[3]{32977340218432}=32068.$$

$$\sqrt[3]{91632508641}=4508 \text{ μὲ ὑπόλοιπον } 20644129.$$

$$\sqrt[3]{43725658}=352 \text{ μὲ ὑπόλοιπον } 111450.$$

Εἰς μὲν τὸ πρῶτον παράδειγμα ἐγράψαμεν τὸ 0, ἐν ἐλλείψει ἑκατοντάδων, εἰς τὸ δεύτερον ὁμοίως ἐν ἐλλείψει δεκάδων κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης διὰ προσεγγίσεως.

245. Διὰ τῆς ἐκτεθείσης μεθόδου ἐλάβομεν τὴν ῥίζαν τῶν ἀτελῶν κύβων ὡς ἔγγιστα μονάδος. Δυνάμεθα ὅμως νὰ παρατείνωμεν τὴν προσέγγισιν, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς τετραγωνικῆς. εἰς οἱονδήποτε ὅριον.

Ἐν γένει ἔστω ἀριθμός τις α, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ὡς ἔγγιστα $\frac{1}{ν}$.

Πολυπλασιάζοντες καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ κύβου τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ὁρίου λαμβάνομεν $α=\frac{αν^3}{ν^3}$.

Παρατηροῦντες δὲ, ὅτι, ὡς διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ κύβου κλασματικοῦ τινος ἀριθμοῦ σχηματίζομεν τὸν κύβον τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τὸν τοῦ παρονομαστοῦ, οὕτω καὶ τὸ ἀνάπαλιν ἡ ῥίζα κλασματικοῦ ἀριθμοῦ λαμβάνεται, ἐξαγομένης τῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τῆς τοῦ παρονομαστοῦ συνάγομεν, ὅτι ἡ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ α, ἢ τοῦ ἴσου $\frac{αν^3}{ν^3}$, ἰσοῦται μὲ $\frac{\sqrt[3]{αν^3}}{ν}$.

Ὅθεν σημειοῦντες διὰ ρ τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ, ὡς ἔγγιστα μονάδος, ἐμπερικλείομεν τὸν ἀριθμὸν α μεταξὺ τοῦ $\frac{ρ^3}{ν^3}$ καὶ $\frac{(ρ+1)^3}{ν^3}$· ἐπομένως ἡ ῥίζα $\sqrt[3]{α}$ ἐμπεριέχεται μεταξὺ $\frac{ρ}{ν}$ καὶ $\frac{ρ+1}{ν}$ ὥστε $\frac{ρ}{ν}$ εἶναι ἡ ὡς ἔγγιστα $\frac{1}{ν}$.

246. Ἀνακεφαλαιοῦντες τὴν ἀνάλυσιν συνιστῶμεν τὸν ἑξῆς κανόνα πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ ὡς ἔγγιστα κλασματικῆς τινος μονάδος. Πολυπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν κῦβον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος, ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου καὶ δίδομεν διαιρέτην αὐτῆς τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.

Π. χ. Ζητοῦμεν τὴν $\sqrt[3]{15}$ ὡς ἔγγιστα $\frac{1}{12}$.

Κατὰ τὸν κανόνα ἔχομεν $15 \times 12^3 = 15 \times 1728 = 25920$.

Ὅθεν $\sqrt[3]{25920} = 29$, ὡς ἔγγιστα μονάδος.

ἐπομένως $\sqrt[3]{15} = \dfrac{\sqrt{25920}}{12} = \frac{29}{12} = 2\frac{5}{12}$, ὡς ἔγγιστα $\frac{1}{12}$.

Ὡσαύτως $\sqrt[3]{47} = \frac{72}{20} = 3\frac{12}{20} = 3\frac{3}{5}$ ὡς ἔγγιστα $\frac{1}{20}$

$\sqrt[3]{53} = \frac{150}{40} = 3\frac{3}{4}$ ὡς ἔγγιστα $\frac{1}{40}$. κτλ.

247. Ἡ χρῆσις τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων διευκολύνει τοὺς ὑπολογισμούς.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς τοῦ 25, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ῥίζαν ὡς ἔγγιστα 0,01.

Ἐνταῦθα ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς τοῦ ὁρίου εἶναι 100, ὁ κῦβος αὐτοῦ καὶ τὸ γινόμενον τοῦ κύβου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 25 λαμβάνονται εὐχερέστατα, προσγραφομένων πρὸς δεξιὰν τοῦ 25 ἓξ μηδενικῶν. Ὅθεν ἐξάγοντες τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ 25000000 εὑρίσκομεν 292· ἐπομένως $\sqrt[3]{25} = \frac{292}{100} = 2,92$ ὡς ἔγγιστα 0,01.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου βλέπομεν, ὅτι ἵνα εὕρωμεν εἰς τὴν ῥίζαν δύο δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, πρέπει νὰ γράψωμεν πρὸς δεξιὰν τοῦ ἀριθμοῦ δύο τμήματα ἐκ τριῶν μηδενικῶν. Καὶ ὡσαύτως ἔπρεπε νὰ γράψωμεν τρία τμήματα, ἂν ἠθέλομεν τὴν ῥίζαν, ὡς ἔγγιστα 0,001· καὶ ἐν γένει, ἵνα εὕρωμεν τὴν ῥίζαν ὡς ἔγγιστα δεκαδικῆς τινος ὑποδιαιρέσεως, γράφομεν πρὸς δεξιὰν τοῦ ἀριθμοῦ τοσάκις τρία μηδενικά, ὅσοι εἶναι οἱ ζητούμενοι δεκαδικοὶ χαρακτῆρες τῆς ῥίζης καὶ ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν αὐτοῦ, εἰς τὴν ὁποίαν διαστέλλομεν τόσους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, ὅσα εἶναι τὰ προσγραφέντα τμήματα τῶν μηδενικῶν. Εὑρίσκομεν παρομοίως.

$\sqrt[3]{3} = 1,442$ ὡς ἔγγιστα 0,001.

$\sqrt[3]{13} = 2,349$ ὡς ἔγγιστα 0,001.

Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

248. Ἐπειδὴ ὁ κῦβος τοῦ κλάσματος λαμβάνεται, ὑψουμένου εἰς τὸν κῦβον τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ· ἄρα ἀντιστρόφως ἐπιστρέφομεν ἀπὸ τοῦ κύβου εἰς τὴν ῥίζαν, ἐξάγοντες τὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν ὅρων. Ἐκ τούτων, ἐὰν μὲν οἱ ὅροι ἦναι τέλειοι κῦβοι, ἡ ῥίζα αὐτῶν εἶναι συμμετρική, ὡς $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$. Ἐὰν δὲ ἦναι ἀτελεῖς, τότε λαμβάνομεν αὐτὴν ὡς ἔγγιστα τῆς ἀκριβείας δι' ἀναλόγων πρὸς τὰς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης μεθόδων.

Ἔστω ἐν γένει ὁ κλασματικὸς $\frac{\alpha}{\beta}$ πολυπλασιάζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ β^2 λαμβάνομεν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\beta^2}{\beta^3}$· ὅθεν $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[3]{\frac{\alpha\beta^2}{\beta^3}}$. καὶ σημειοῦντες τὴν ὡς ἔγγιστα μονάδος ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ ρ ἔχομεν

$$\frac{\sqrt[3]{\alpha\beta^2}}{\beta} = \frac{\rho}{\beta}, \text{ ὡς ἔγγιστα } \frac{1}{\beta}.$$

Π. χ. $\frac{13}{15}$ τρέπεται εἰς $\frac{13\times15^2}{(15)^3} = \frac{13\times225}{(15)^3} = \frac{2925}{(15)^3}$

ὅθεν $\sqrt[3]{\frac{13}{15}} = \frac{\sqrt[3]{2925}}{15} = \frac{14}{15}$ ὡς ἔγγιστα $\frac{1}{15}$.

249. Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς περιέχῃ ἕνα παράγοντα τέλειον κῦβον, τότε σχηματίζομεν τὸν κῦβον αὐτοῦ ἁπλούστερον, καθιστῶντες ὡσαύτως τέλειον κῦβον καὶ τὸν ἕτερον παράγοντα.

Ἔστω φέρ' εἰπεῖν ὁ ἀριθμὸς $\frac{31}{48}$. Ἐπειδὴ $48=8\times6$, πολυπλασιάζομεν μόνον ἐπὶ 36, τετράγωνον τοῦ 6 καὶ λαμβάνομεν $\frac{31}{48} = \frac{1116}{8\times6^3}$.

Ὅθεν $\sqrt[3]{\frac{31}{48}} = \frac{\sqrt{1116}}{12} = \frac{10}{12}$ ὡς ἔγγιστα $\frac{1}{12}$.

Ἐὰν δὲ θέλωμεν μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ μεῖον 0, 1, ἢ 0, 01 κτλ.

250. Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἶναι μερικὴ περίστασις τῆς ἀνωτέρω παρατηρήσεως.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 3, 1415, ἢ $\frac{31415}{10000}$, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ῥίζαν, ὡς ἔγγιστα 0,01.

Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ 10000 δὲν εἶναι τέλειος κύβος, πολυπλασιάζομεν ἐπὶ 100 καὶ οὕτως ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ ἰσοδυνάμου $\frac{3141500}{1000000}$, ἢ μᾶλλον τὴν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ εὑρίσκομεν $\frac{146}{100} = 1,46$ ὡς 0,001. Δυνάμεθα δὲ νὰ προάξωμεν καὶ περαιτέρω τὴν ἐκτίμησιν μεῖον 0,001 κτλ. προσγράφοντες εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ἕτερα τμήματα ἐκ τριῶν μηδενικῶν.

Ἐν γένει ἵνα ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν δεκαδικοῦ κλασματικοῦ. γράφομεν μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ, ὥστε καθιστῶμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν χαρακτήρων τριπλάσιον τοῦ τῶν ζητουμένων εἰς τὴν ῥίζαν· ἐξάγοντες δὲ τὴν ῥίζαν αὐτοῦ ὡς ἀκεραίου διαστέλλομεν τόσους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, ὅσα εἶναι τὰ τμήματα τῶν μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν δεκαδικῶν χαρακτήρων τοῦ ἀριθμοῦ.

Εὑρίσκομεν παρομοίως $\sqrt[3]{0,00415} = 1,4429$ μεῖον 0,0001.

$\sqrt[3]{0,00101} = 0,10$ ὡς ἔγγιστα 0,001 κτλ.

251. Ἐπειδὴ ἡ χρῆσις τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων διευκολύνει τὸν ὑπολογισμόν, διὰ τοῦτο καὶ τὴν ῥίζαν τῶν κοινῶν κλασμάτων προτιμῶμεν μᾶλλον εἰς δεκαδικὴν παράστασιν. Λαμβάνομεν δὲ αὐτὴν τρέποντες τὸν κοινὸν κλασματικὸν εἰς ἰσοδύναμον δεκαδικόν, καὶ λαμβάνοντες τρὶς τόσους δεκαδικοὺς χαρακτῆρας, ὅσους θέλομεν νὰ ἔχῃ ἡ ῥίζα. Οὕτως ἡ ῥίζα τοῦ ἰσοδυνάμου κλασματικοῦ θεωρεῖται καὶ ὡς ῥίζα τοῦ προτεθέντος κοινοῦ κλασματικοῦ.

Π. χ. $\frac{6}{7}$ τρέπεται εἰς 0,857142857142 . . . . λαμβάνοντες δὲ τοὺς ἐννέα πρώτους χαρακτῆρας 857142857 ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ μέρους τούτου, ὅθεν $\sqrt[3]{\frac{6}{7}} = 0,957$ μεῖον 0,001.

Ὁμοίως $\sqrt[3]{\frac{13}{15}} = \sqrt[3]{0,866666} = 0,95$ μεῖον 0,01. κτλ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

Περὶ Λόγων καὶ Ἀναλογιῶν.

§. ά. Εἰσαγωγή.

252. Λαμβάνομεν ὡρισμένην ἰδέαν ποσότητός τινος (ἀριθ. 2), ὅταν ἀντιπαραβάλωμεν αὐτὴν πρὸς τὴν μονάδα. Τὸ ἐξαγόμενον δὲ τῆς συγκρίσεως ταύτης λέγεται ἀριθμός. Ἤδη καθολικεύοντες τὴν ἀρχὴν, ἀντὶ τῆς μονάδος, λαμβάνομεν ἑτέραν τινὰ ποσότητα, συνισταμένην ἐκ πολλῶν μονάδων, ἢ ἐκ μερῶν τινων τῆς μονάδος, καὶ πρὸς τὴν ποσότητα ταύτην ἀντιπαραβάλλομεν τὴν πρώτην, ἢ μᾶλλον ζητοῦμεν τὴν σχέσιν τῶν ἀριθμῶν τῶν δύο τούτων ποσοτήτων, τὴν ὁποίαν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους. Τὸ ἐξαγόμενον δὲ τῆς συγκρίσεως ταύτης, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ διεκτίμησις τῆς σχέσεως τῶν δύο συγκρινομένων ποσῶν, λέγεται λόγος. Ἐμφαίνει δὲ τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἡ μία ποσότης σχηματίζεται ἐκ τῆς ἑτέρας, ὑποτιθεμένης ὡς γνωστῆς· ὥστε γνωστῆς οὔσης τῆς μιᾶς καὶ τοῦ λόγου αὐτῆς πρὸς τὴν ἑτέραν ποσότητα, προσδιορίζεται καὶ τῆς δευτέρας ταύτης τὸ μέγεθος.

Συγκρίνομεν δύο ποσότητας πρὸς ἀλλήλας διττῶς· ἢ ζητοῦμεν κατὰ πόσον ἡ μία ὑπερέχει τὴν ἑτέραν, καὶ τότε τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως ταύτης, ἤτοι ὁ λόγος, εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τῆς μικροτέρας ἀπὸ τὴν μεγαλητέραν· ἢ ζητοῦμεν, ποσάκις ἡ μία ἐμπεριέχει τὴν ἑτέραν, καὶ τότε ὁ λόγος προσδιορίζεται διὰ τῆς διαιρέσεως.

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 24 καὶ 6· παραβαλλόμενοι πρὸς ἀλλήλους δίδουσι διὰ μὲν τῆς ἀφαιρέσεως $24-6=18$, διὰ δὲ τῆς διαιρέσεως $\frac{24}{6}=4$· ἑκάτερον τῶν ἐξαγομένων 18 καὶ 4, καθὸ χρησιμεῦον εἰς τὴν διεκτίμησιν τοῦ ἑνὸς σχετικῶς πρὸς τὸν ἕτερον ἀριθμὸν, λέγεται λόγος.

Πρὸς διάκρισιν τῶν δύο τούτων εἰδῶν ἐλέγοντο τὸ πάλαι ὁ μὲν πρῶτος λόγος ἀριθμητικὸς, ὁ δὲ δεύτερος λόγος γεωμετρικός. Ἀλλὰ τὰ ὀνόματα ταῦτα, μὴ φέροντα πραγματικὴν τὴν σημασίαν τῆς λέξεως, δὲν εἶναι σήμερον εἰς χρῆσιν, λέγονται δὲ ὁ μὲν πρῶτος, λόγος δι' ἀφαιρέσεως, ἢ ἁπλῶς διαφορὰ, ὁ δὲ δεύτερος, λόγος διὰ διαιρέσεως ἢ ἁπλῶς λόγος. Ἐπειδὴ δι' αὐτοῦ σχεδὸν πάντοτε εἰς τὴν Μαθηματικὴν διατιμῶμεν τὴν σχέσιν δύο ποσοτήτων πρὸς ἀλλήλας. Οὕτως εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν ἡ σχέσις τῆς ἀρχικῆς μονάδος οἱασδήποτε φύσεως πρὸς μίαν τῶν ὑποδιαιρέσεων αὐτῆς ἐκτιμᾶται διὰ τῆς διαιρέσεως. Ὁμοίως εἰς τὴν σύγκρισιν δύο διαφόρων μετρικῶν συστημάτων, π. χ. τοῦ βασιλικοῦ πήχεως πρὸς τὸν ὀθωμανικὸν, τοῦ βασιλικοῦ στρέμματος πρὸς τὸ πελοποννησιακὸν, καὶ νομίσματος πρὸς νόμισμα καὶ μέτρου πρὸς μέτρον καὶ βάρους πρὸς βάρος καὶ ἐν γένει μονάδος τινὸς οἱασδήποτε πρὸς ἑτέραν ὁμοειδῆ, ἡ σχέσις αὐτῶν ὡς εἴδομεν ἐκτιμᾶται διὰ τῆς διαιρέσεως.

Οἱ δύο ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀναφέρεται ὁ λόγος, εἴτε δι' ἀφαιρέσεως, εἴτε διὰ διαιρέσεως, λέγονται ὅροι· καὶ ὁ μὲν πρῶτον ἐκφωνούμενος ἢ γραφόμενος λέγεται ἡγούμενος, ὁ δὲ ἕτερος, ἑπόμενος.

253. Ὅταν δύο λόγοι δι' ἀφαιρέσεως ἦναι ἴσοι, τὸ σύστημα τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων οὗτοι προκύπτουσι, λέγεται ἰσοδιαφορά· ἄλλοτε δὲ ἐλέγετο ἀναλογία ἀριθμητική (α).

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 12, 5, 24, 17, παραβαλλόμενοι δι' ἀφαιρέσεως ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον καὶ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον, δίδουσι τὴν αὐτὴν διαφορὰν 7, τουτέστι $12-5=7$ καὶ $24-17=7$. Ὅθεν συνιστῶσι τὴν ἰσοδιαφορὰν $12-5=24-17$

τὴν ὁποίαν γράφομεν οὕτως $12 . 5 : 24 . 17 .$

τουτέστι διακρίνομεν τοὺς μὲν ὅρους διὰ μιᾶς στιγμῆς, τὸν δὲ λόγον διὰ δύο· ἀπαγγέλλομεν δὲ αὐτὴν συντόμως 12 πρὸς 5, οὕτω 24 πρὸς 17 καὶ ἐννοοῦμεν, ὅτι ὁ 12 ὑπερέχει τὸν 5 κατὰ τοσοῦτον, καθόσον ὁ 24 ὑπερέχει τὸν 17.

Ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος ὅρος, οἷον ὁ 12 καὶ 24, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ ἡγούμενοι τῶν δύο λόγων, λέγονται καὶ ἡγούμενοι τῆς ἰσοδιαφορᾶς, καὶ ὁμοίως ὁ δεύτερος καὶ ὁ τέταρτος, οἷον ὁ 5 καὶ ὁ 17 λέγονται ἑπόμενοι.

Πρὸς τούτοις ὁ πρῶτος καὶ ὁ τέταρτος, οἷον 5 καὶ 17 λέγονται ἄκρα ἢ ἄκροι ὅροι, ὁ δὲ δεύτερος καὶ τρίτος, οἷον ὁ 5 καὶ 24, λέγονται μέσα, ἢ μέσοι ὅροι τῆς ἰσοδιαφορᾶς.

254. Παρομοίως, ὅταν δύο λόγοι κατὰ πηλίκον ἦναι ἴσοι, τὸ σύστημα τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων οὗτοι προκύπτουσι, λέγεται ἀναλογία.

Π. χ. ὁ 15 πρὸς τὸν 5 ἔχει λόγον 3, ὡς ἐπίσης ὁ 36 πρὸς τὸν 12·

(α) Οἱ ἀρχαῖοι ἐχώριζον τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν ἀπὸ τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις. Οὕτως ὁ Εὐκλείδης πραγματεύεται περὶ αὐτῶν εἰς τὸ Ε΄ βιβλίον τῆς Γεωμετρίας. Ὅθεν, ἐπειδὴ ἡ πρώτη ἐφαρμογὴ τῶν ἀναλογιῶν ἐγένετο εἰς τὰς γραμμὰς, ὠνομάσθησαν διὰ τοῦτο καὶ γεωμετρικαὶ ἀναλογίαι. Πρὸς διάκρισιν δὲ αὐτῶν ὠνομάσθη ἀριθμητικὴ ἀναλογία τὸ σύστημα τῶν ἐπίσης διαφερόντων ἀριθμῶν, ἤτοι ἡ ἰσοδιαφορά· μολονότι ἡ ἔρευνα αὐτῆς ἐπησχόλησε πολὺ ὕστερον τοὺς μαθηματικούς.

οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ συνιστῶσιν ἀναλογίαν, τὴν ὁποίαν ἀντὶ τῆς ἰσοπηλικότητος $\frac{15}{5}=\frac{36}{12}$ γράφουσιν ὡς ἑξῆς 15 : 5 : : 36 : 12˙ τουτέστι γράφομεν δύο στιγμὰς πρὸς διάκρισιν τῶν ὅρων καὶ μίαν πρὸς διάκρισιν τοῦ λόγου τῆς ἀναλογίας˙ ἀπαγγέλλομεν δὲ αὐτὴν συντόμως 15 πρὸς 5, οὕτω 36 πρὸς 15 καὶ ἐννοοῦμεν, ὅτι ὁποῖον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 15 διὰ τοῦ 5, τὸ αὐτὸ εἶναι καὶ τὸ τῆς διαιρέσεως τοῦ 36 διὰ τοῦ 12, ἢ ὁσάκις ὁ πρῶτος ἐμπεριέχει τὸν δεύτερον, τοσάκις ὁ τρίτος ἐμπεριέχει τὸν τέταρτον.

Οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ τῆς ἀναλογίας λέγονται ὡσαύτως ὅροι˙ καὶ ὁ μὲν πρῶτος καὶ τρίτος λέγονται ἡγούμενοι, ὁ δὲ δεύτερος καὶ τέταρτος ἑπόμενοι. Ὁμοίως ὁ πρῶτος καὶ τέταρτος λέγονται ἄκρα, ὁ δὲ δεύτερος καὶ τρίτος μέσα τῆς ἀναλογίας.

Αἱ ἰσοδιαφοραὶ καὶ αἱ ἀναλογίαι, καὶ μάλιστα αἱ δεύτεραι, ἔχουσι πολλὰς ἰδιότητας, ἐκ τῶν ὁποίων ἐξαρτᾶται ἡ λύσις οὐσιωδῶν ζητημάτων˙ ταύτας ἐρχόμεθα νὰ ἀναπτύξωμεν κατὰ τάξιν ἐν τοῖς ἐφεξῆς.

§. β΄. Περὶ ἰσοδιαφορῶν.

255. Θεμελιώδης ἀρχὴ πάσης ἰσοδιαφορᾶς ὑπάρχει, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων.

Ἔστω π. χ. ἡ ἰσοδιαφορὰ $11 \,.\, 9 : 19 \,.\, 17$
Ἐκ ταύτης συνάγομεν $11+17= \quad 28$
καὶ . . . . . $9+19= \quad 28$
ὅθεν . . . . . . $11+17=9+19$.

Διὰ τὴν γενικὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσες ταύτης λαμβάνομεν τὴν γραμματικὴν ἰσοδιαφορὰν α. β: γ. δ, τῆς ὁποίας τὸν λόγον καλοῦμεν λ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ πρῶτος ἡγούμενος α ἰσοῦται μὲ τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ β πλέον τοῦ λόγου, τουτέστι α=β+λ. Καὶ ὁμοίως ὁ δεύτερος ἡγούμενος γ ἰσοῦται μὲ τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ δ πλέον τοῦ λόγου, τουτέστι γ=δ+λ. Ἐκ τούτου τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων α+δ καὶ τὸ τῶν μέσων β+γ δι' ἀντικαταστάσεως τῶν α καὶ γ ἄγονται εἰς α+δ=β+λ+δ καὶ β+γ=β+δ+λ, ἐκ τοῦ ὁποίου βλέπομεν, ὅτι ἀμφότερα τὰ ἀθροίσματα α+δ καὶ β+γ συνίστανται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν β, λ καὶ δ, καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα.

256. Ἀντιστρόφως, ἂν τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων, οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ συνιστῶσιν ἰσοδιαφοράν.

Ἔστωσαν τὰ ἴσα ἀθροίσματα α+δ καὶ β+γ, τουτέστιν

α+δ=β+γ
ἀφαιροῦντες ἑκατέρωθεν τὰ ἴσα δ+β=δ+β
λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τῶν ὑπολοίπων α—β=γ—δ
ἐξ ἧς ἡ ἰσοδιαφορὰ α. β: γ. δ.

257. Ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἀρχῆς προκύπτει, ὅτι γνωρίζοντες τοὺς τρεῖς ὅρους τῆς ἰσοδιαφορᾶς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸν τέταρτον. Διότι ἂν ὁ ζητούμενος ὅρος ἦναι ἄκρος, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέσων τὸν γνωστὸν ἄκρον, ἂν δὲ ἦναι μέσος, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων τὸν γνωστὸν μέσον.

Π. χ. Ἔστω ἡ ἰσοδιαφορὰ 23 . 11 : 49 . χ (διὰ τοῦ χ σημειοῦμεν πάντοτε τὸν ἄγνωστον ὅρον).

Ἐπειδή, ὡς ἐκ τῆς ἰδιότητος τῆς ἰσοδιαφορᾶς, $23+χ=11+49$, ἢ $23+χ=60$. Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ ὅλου 60 τὸ ἓν μέρος 23 λαμβάνομεν τὸ ἕτερον· οὕτω $χ=60-23=37$.

Τῷ ὄντι σχηματίζεται ἡ ἰσοδιαφορὰ 23 . 11 : 49 . 37.

Ὁμοίως διὰ τὴν ἰσοδιαφορὰν 31 . 25 : χ . 78.

Εὑρίσκομεν $χ = 31 + 78 - 25 = 109 - 25 = 84$ καὶ τῷ ὄντι 31 . 25 : 84 . 78.

258. Ὑπάρχουσιν ἰσοδιαφοραί, τῶν ὁποίων οἱ δύο μέσοι ὅροι εἶναι ἴσοι· αἱ τοιαῦται λέγονται συνεχεῖς ἰσοδιαφοραί· ὁ δὲ ἐπαναλαμβανόμενος ὅρος λέγεται μέσος διαφορικός.

Π. χ. 27 . 39 : 39 . 51 εἶναι συνεχὴς ἰσοδιαφορά.

Εἰς ταύτας, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων συγχέεται μὲ τὸ διπλοῦν τοῦ μέσου· ἄρα δὶς ὁ μέσος διαφορικὸς ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων, καὶ ἑπομένως αὐτὸς μόνος ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος.

Ἐκ τούτου εἰς τὴν ἰσοδιαφορὰν 23 . χ : χ . 49.

Εὑρίσκομεν $χ = \dfrac{23+49}{2} = \frac{72}{2} = 36$.

Καὶ τῷ ὄντι 23 . 36 : 36 . 49.

259. Ἰδοὺ καὶ ἄλλαι τινὲς ἰδιότητες τῶν ἰσοδιαφορῶν, προκύπτουσαι ἐκ τῆς ἀνωτέρω θεμελιώδους ἀρχῆς. Πάσης ἰσοδιαφορᾶς δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν ἢ νὰ ἐλαττώσωμεν τοὺς δύο πρώτους, ἢ τοὺς δύο δευτέρους ὅρους, καὶ ὁμοίως νὰ αὐξήσωμεν ἢ νὰ ἐλαττώσωμεν τοὺς δύο ἡγουμένους ἢ τοὺς δύο ἑπομένους κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα νὰ συνιστῶσιν ἰσοδιαφοράν.

Π. χ. ὑπαρχούσης τῆς ἰσοδιαφορᾶς $α . β : γ . δ$.

συνάγομεν ἐπίσης $α \pm μ . β \pm μ : γ . δ$, ἢ $α . β : γ \pm μ . δ \pm μ$.

καὶ ὁμοίως $α \pm μ . β : γ \pm μ . δ$, ἢ $α . β \pm μ : γ . δ \pm μ$.

Διότι καθ᾽ ὅλας τὰς τροποποιήσεις ταύτας αὐξάνομεν ἢ ἐλαττοῦμεν ἐπίσης ἕνα ἄκρον καὶ ἕνα μέσον· ὥστε δὲν ἀνατρέπεται ἡ ἰσότης τῶν δύο ἀθροισμάτων· ἐπομένως κατὰ τὴν θεμελιώδη ἀρχὴν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι συνιστῶσιν ἰσοδιαφοράν.

Δυνάμεθα πρὸς τούτοις νὰ μεταβάλωμεν τὴν τάξιν τῶν ὅρων κατὰ μίαν τῶν ἑξῆς ὀκτὼ μεταθέσεων, χωρὶς νὰ καταστραφῇ ἡ ἰσοδιαφορά.

Π. χ. Ὑπαρχούσης τῆς ἰσοδιαφορᾶς	α . β : γ . δ.
λαμβάνομεν καὶ τὰς ἑξῆς.	
μεταθέσει τῶν ἄκρων	δ . β : γ . α.
μεταθέσει τῶν μέσων	α . γ : β . δ.
συναλλαγῇ τῶν ἄκρων καὶ μέσων	β . α : δ . γ.
Καὶ ὁμοίως ἐκ τῆς δεδομένης ἐναλλαγῇ	
τῶν λόγων λαμβάνομεν .	γ . δ : α . β.
ἐξ ἧς προκύπτουσι μαρομοίως	
μεταθέσει τῶν ἄκρων	β . δ : α . γ.
μεταθέσει τῶν μέσων	γ . α : δ . β.
συναλλαγῇ τῶν ἄκρων καὶ μέσων	δ . γ : β . α.

Διότι καθ' ὅλας τὰς μεταθέσεις ταύτας τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων μένει ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων τουτέστιν $α+δ=β+γ$· ὥστε ὑπάρχει ἡ θεμελιώδης ἀρχὴ τῆς ἰσοδιαφορᾶς.

Δὲν ἐπιμένομεν περισσότερον εἰς τὰς ἰσοδιαφοράς· ἐπειδὴ ἡ χρῆσις αὐτῶν ἀπαντᾶται σπανίως· μεταβαίνομεν δ εἰς τὴν ἔρευναν τῶν κυρίως λεγομένων ἀναλογιῶν.

§. γ΄. Περὶ Ἀναλογιῶν.

260. Ὠνομάσαμεν ἀναλογίαν (ἀριθ. 254) τὴν ἰσότητα δύο πηλίκων, ἢ μᾶλλον τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν, ἐξ ὧν ταῦτα προκύπτουσι.

Τέσσαρες ἀριθμοὶ συγκροτοῦντες ἀναλογίαν ἔχουσι τὸν κοινὸν λόγον ἀκέραιον, ἢ μικτόν, ἢ κλάσμα.

Ἔστωσαν π. χ. αἱ ἀναλογίαι	18 : 6 : : 24 : 8
	12 : 9 : : 36 : 27
	5 : 12 : : 20 : 48

τῆς μὲν πρώτης ὁ λόγος εἶναι ἀκέραιος $\frac{18}{6}=3$.
τῆς δὲ δευτέρας εἶναι κλασματικὸς $\frac{12}{9}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$.
τῆς δὲ τρίτης τὸ κλάσμα $\frac{5}{12}$.

261. Θεμελιώδης ἰδιότης πάσης ἀναλογίας ὑπάρχει, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν μέσων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων.

Ἐν γένει ἔστω ἡ ἀναλογία α : β : : γ : δ.
τῆς ὁποίας ὁ λόγος ἔστω λ.

Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ἰσοῦται μὲ τὸν δεύτερον, πολυπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν λόγον, τουτέστιν $α=ϐλ$. καὶ ὁ τρίτος ἰσοῦται μὲ τὸν τέταρτον, πολυπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν λόγον, τουτέστιν $γ=δλ$. ἄρα τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων $α\times δ$ καὶ τὸ τῶν μέσων $ϐ\times γ$ δι' ἀντικαταστάσεως τῶν α καὶ γ, ἄγονται εἰς $α\times δ=ϐ\times λ\times δ$ καὶ $ϐ\times γ=ϐ\times δ\times λ$. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὰ δύο γινόμενα $α\times δ$ καὶ $ϐ\times γ$, ἐξισούμενα πρὸς τὸ τρίτον $ϐ\times δ\times λ$, εἶναι ἴσα ἀλλήλοις· τουτέστιν $α\times δ=ϐ\times γ$.

262. Ἀντιστρόφως, ἂν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων, πρέπει μεταξὺ τῶν παραγόντων νὰ συγκροτῆται ἀναλογία, τῆς ὁποίας ἄκρα μὲν εἶναι οἱ δύο παράγοντες τοῦ ἑνός. μέσα δὲ οἱ δύο παράγοντες τοῦ ἑτέρου γινομένου.

Διότι ἔστω ἐν γένει ἡ ἰσότης τῶν γινομένων $α\times δ=ϐ\times γ$. Διαιροῦντες ἑκάτερον μέλος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $ϐ\times δ$

λαμϐάνομεν τὰ ἴσα πηλίκα $\dfrac{α\times δ}{ϐ\times δ}=\dfrac{ϐ\times γ}{ϐ\times δ}$, ἢ $\dfrac{α}{ϐ}=\dfrac{γ}{δ}$

ἐξ ὧν προκύπτει ἡ ἀναλογία $α : ϐ : : γ : δ$.

263. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω θεμελιώδους ἰδιότητος ἕπεται, ὅτι, γνωστῶν ὄντων τῶν τριῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸν τέταρτον. Διότι, ἂν ὁ ἄγνωστος ἦναι ἄκρος, διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν μέσων διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου, ἂν δὲ ἦναι μέσος, διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων τοῦ γνωστοῦ μέσου.

Ἔστω π. χ. ἡ ἀναλογία $18 : 24 : : 72 : χ$.

Ἐπειδὴ $18 \,.\, χ=24\times 72$, ἄρα καὶ $χ=\dfrac{24\times 72}{18}=96$.

Καὶ τῷ ὄντι εἰς τὴν ἀναλογίαν $18 : 24 : : 72 : 96$.
ὁ λόγος τῶν δευτέρων $\frac{72}{96}$ εἶναι $\frac{3}{4}$, ὡς καὶ ὁ τῶν πρώτων $\frac{18}{24}$.

264. Ἂν οἱ δύο μέσοι ἦναι ἴσοι, ὡς π. χ. $9 : 12 : : 12 : 16$, τότε ἡ μὲν ἀναλογία λέγεται συνεχής, ὁ δὲ ἐπαναλαμϐανόμενος μέσος λέγεται μέσος ἀνάλογος. Προκύπτει δ' ἐξ αὐτῆς τῆς συστάσεως πάσης συνεχοῦς ἀναλογίας, ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων. Ἐπομένως δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἄγνωστον μέσον ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου τῶν ἄκρων.

Ἔστω π. χ. ἡ συνεχὴς ἀναλογία $50 : χ : : χ : 8$. Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἀρχὴν ἔχομεν $χ^2=50\times 8=400$
ἐπομένως $χ=\sqrt{400}=20$.

Καὶ τῷ ὄντι $50 : 20 : : 20 : 8$. διότι $\frac{50}{20}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$.

Ἔστω ἐν γένει ἡ ἀναλογία $α : χ : : χ : ϐ$

Συνάγομεν $χ^2=α\times ϐ$ καὶ $χ=\sqrt{α\times ϐ}$.

Ἐκ τοῦ γενικοῦ τούτου τύπου τοῦ μέσου ἀναλόγου συμπεραίνομεν καὶ τὴν καθολικωτέραν πρότασιν, ὅτι πᾶσα τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου δύο παραγόντων εἶναι ἀριθμὸς μέσος ἀνάλογος τῶν δύο παραγόντων.

265. Ἰδοὺ καὶ ἄλλαι ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν. Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ πολυπλασιάσωμεν, ἢ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δύο πρώτους, ἢ τοὺς δύο δευτέρους ὅρους μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, χωρὶς νὰ καταστραφῇ ἡ ἀναλογικὴ σχέσις.

Ἔστω π. χ. ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$.

πολυπλασιάζοντες μὲν ἐπὶ μ συνάγομεν $\alpha\mu : \beta\mu :: \gamma : \delta$.

καὶ . . . . $\alpha : \beta :: \gamma\mu : \delta\mu$.

Διαιροῦντες δὲ ἔχομεν $\frac{\alpha}{\mu} : \frac{\beta}{\mu} :: \gamma : \delta$.

καὶ . . . . $\alpha : \beta :: \frac{\gamma}{\mu} : \frac{\delta}{\mu}$.

Καὶ κατὰ τὰς τέσσαρας ταύτας τροποποιήσεις τῶν ὅρων διατηρεῖται πάντοτε ἡ ἀνολογία. Διότι πολυπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων τῶν δύο ὅρων αὐτῆς, τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου, ἢ τοῦ τρίτου καὶ τοῦ τετάρτου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, πολυπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διαιρετέος καὶ διαιρέτης διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἑπομένως δὲν μεταβάλλεται τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀναλογίας.

266. Ὡσαύτως πολυπλασιαζομένων, ἢ διαιρουμένων τῶν δύο ἡγουμένων, ἢ τῶν δύο ἑπομένων ὅρων τῆς ἀναλογίας, διαιρεῖται ἡ ἀναλογία.

Π. χ. ὑπαρχούσης τῆς ἀναλογίας $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$.
ὑπάρχει προσέτι καὶ ἑκάστη τῶν ἑξῆς

$\alpha\mu : \beta :: \gamma\mu : \delta$. ἢ $\alpha : \beta\mu :: \gamma : \delta\mu$.

καὶ $\frac{\alpha}{\mu} : \beta :: \frac{\gamma}{\mu} : \delta$. ἢ $\alpha : \frac{\beta}{\mu} :: \gamma : \frac{\delta}{\mu}$.

Διότι διὰ τοῦ πολυπλασιασμοῦ ἢ τῆς διαιρέσεως τῶν ἡγουμένων, θεωρουμένων ὡς διαιρετέων, πολυπλασιάζεται, ἢ διαιρεῖται ὁ λόγος καὶ ὁμοίως διὰ τοῦ πολυπλασιασμοῦ ἢ τῆς διαιρέσεως τῶν ἑπομένων, θεωρουμένων ὡς διαιρετῶν, διαιρεῖται ἢ πολυπλασιάζεται ὁ λόγος· ὥστε μεταβάλλεται μὲν ὁ λόγος εἰς πολυπλάσιόν τι, ἢ ὑποπολυπλάσιον τοῦ λόγου τῆς προτεθείσης, ἀλλὰ τὰ πολυπλάσια ἢ ὑποπολυπλάσια ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως ὑπάρχει ἡ ἀναλογία.

Διὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς ἀκεραίους τοὺς κλασματικοὺς ὅρους τινὸς ἀναλογίας.

Π. χ. εἰς τὴν ἀναλογίαν $18\,\frac{3}{4} : 8\,\frac{1}{3} :: 10\,\frac{1}{2} : 4\,\frac{2}{3}$.
λαμβάνομεν κατὰ πρῶτον $\frac{75}{4} : \frac{25}{3} :: \frac{42}{4} : \frac{14}{3}$.

Καὶ πολυπλασιαζομένων τῶν μὲν ἡγουμένων ἐπὶ 4, τῶν δὲ ἑπομένων ἐπὶ 3, λαμβάνομεν $75 : 25 :: 42 : 14$.

267. Ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ἰσοδιαφορᾶς ὡσαύτως καὶ ἐπὶ πάσης ἀναλογίας δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν τοὺς ὅρους αὐτῆς κατὰ μίαν τῶν ἑξῆς ὀκτὼ μεταθέσεων καὶ νὰ διατηρήσωμεν τὴν ἀναλογικὴν σχέσιν.

Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$.
συνάγομεν μεταθέσει τῶν ἄκρων $\delta : \beta :: \gamma : \alpha$.
μεταθέσει τῶν μέσων $\alpha : \gamma :: \beta : \delta$.
συναλλαγῇ τῶν ἄκρων εἰς μέσα $\beta : \alpha :: \delta : \gamma$.

Ὁμοίως μεταθέσει τῶν δύο λόγων τῆς προτεθείσης ἔχομεν
$\gamma : \delta :: \alpha : \beta$.

ἐξ ἧς πορίζόμεθα
μεταθέσει τῶν ἄκρων $\beta : \delta :: \alpha : \gamma$.
μεταθέσει τῶν μέσων $\gamma : \alpha :: \delta : \beta$.
συναλλαγῇ τῶν ἄκρων εἰς μέσα $\delta : \gamma :: \beta : \alpha$.

Ἐπειδὴ καθ' ὅλας τὰς μεταβολὰς ταύτας διατηρεῖται ἡ θεμελιώδης ἀρχὴ, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, τουτέστιν $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$, καὶ ἑπομένως ὑπάρχει ἡ ἀναλογία. Δὲν πρέπει ὅμως νὰ νομίσωμεν, ὅτι καὶ ὁ λόγος μένει ἀμετάβλητος. Διότι τῆς μὲν δεδομένης ὁ λόγος εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}$, τῶν δὲ ἐφεξῆς διαδοχικῶς $\frac{\delta}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ $\frac{\delta}{\gamma}$.

268. Αἱ ἑξῆς ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν ἔχουσι πολλὴν ἐφαρμογὴν καὶ εἰς τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν, ἀλλ' ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἰς τὴν Γεωμετρίαν, καὶ εἶναι διὰ τοῦτο ἄξιαι πολλῆς προσοχῆς.

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ἔχει λόγον πρὸς τὸν δεύτερον ὅρον, ὡς τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο δευτέρων ἔχει λόγον πρὸς τὸν τέταρτον.

Ἔστω π. χ. ἡ ἀναλογία $72 : 24 :: 45 : 15$

Ἐκ ταύτης συνάγομεν διὰ μὲν τῆς προσθέσεως
$72+24 : 24 :: 45+15 : 15$
διὰ δὲ τῆς ἀφαιρέσεως $72-24 : 24 :: 45-15 : 15$
ὥστε, συντομίας ἕνεκα, γράφομεν $72\pm24 : 24 :: 45\pm15 : 15$
προφέροντες ταυτοχρόνως τὸ διπλοῦν σημεῖον $\pm$ πλέον ἢ μεῖον.

Διότι αὐξανομένου ἢ ἐλαττουμένου ἑκατέρου ἡγουμένου κατὰ τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ, αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται ὁ λόγος αὐτῶν κατὰ μίαν μονάδα· καὶ ἐπειδὴ πρότερον οἱ λόγοι ἦσαν ἴσοι, ἄρα καὶ οἱ δεύτεροι εἶναι ἴσοι· καὶ ἑπομένως οἱ προσδιορίζοντες αὐτοὺς ἀριθμοὶ συνιστῶσιν ἀναλογίαν· οὕτως εἰς μὲν τὴν δεδομένην ἀναλογίαν ὁ λόγος $\frac{72}{24}$ ἰσοῦται μὲ 3· εἰς δὲ τὰς συναγομένας εὑρίσκομεν ἀνώτερον ἢ κατώτερον κατὰ μονάδα, οἷον

$\frac{72+24}{24}=4$ καὶ $\frac{72-24}{24}=2$· ἀλλὰ τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τοὺς δευτέρους ὅρους $\frac{45\pm15}{15}$· ὥστε δὲν καταστρέφεται ἡ ἰσοπηλικότης καὶ ἑπομένως ἡ ἀναλογία τῶν ὅρων.

269. Ἀντὶ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τετάρτου ὅρου δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ὡσαύτως τὸν πρῶτον καὶ τὸν τρίτον καὶ νὰ ἐκφράζωμεν γενικωτέραν τὴν ἰδιότητα.

Τῷ ὄντι, ὑπαρχούσης τῆς ἀναλογίας $72 : 24 : : 45 : 15.$
ἀπεδείξαμεν ἤδη καὶ τὴν $72\pm24 : 24 : : 45\pm15 : 15.$ (1)
μεταθέσει τῶν μέσων λαμβάνομεν $72\pm24 : 45\pm15 : : 24 : 15.$
ἀλλὰ καὶ ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν $72 : 45 : : 24 : 15.$
ἄρα διὰ τὴν ἰσότητα τοῦ δευτέρου λόγου $24 : 15$
συνάγομεν $72\pm24 : 45\pm15 : : 72 : 45$
καὶ μεταθέσει τῶν μέσων ἔχομεν $72\pm24 : 72 : : 45\pm15 : 45$ (2).

Ὅθεν ἐκ τῶν δύο ἀναλογιῶν (1) καὶ (2) ἑρμηνεύεται καθολικωτέρα ἡ πρότασις. Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα, ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων, ἔχει λόγον πρὸς τὸν πρῶτον ἢ τὸν δεύτερον, ὡς τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο δευτέρων ἔχει λόγον πρὸς τὸν τρίτον ἢ τὸν τέταρτον.

270 Συνέπεια τῆς ἰδιότητος ταύτης θεωρεῖται καὶ ἡ ἑξῆς ἀρχή· Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἑπομένων, ὡς εἷς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενον.

Ἔστω ἡ ἀναλογία $72 : 24 : : 45 : 15.$ (1)
μεταθέσει τῶν μέσων ἔχομεν $72 : 45 : : 24 : 15.$
Καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀρχὴν $72\pm45 : 45 : : 24\pm15 : 15$
καὶ μεταθέσει τῶν μέσων $72\pm45 : 24\pm15 : : 45 : 15$
ἢ $: : 72 : 24$

ἡ τελευταία αὕτη ἀπαγγελλομένη σχετικῶς πρὸς τὴν (1) ἀποδεικνύει τὴν προταθεῖσαν ἰδιότητα.

271. Διακρίνοντες τὴν διπλῆν ἀναλογίαν

$$72 \pm 45 : 24 \pm 15 : : 45 : 15$$

εἰς τὴν . . . . . . $72 \mp 45 : 24 \mp 15 : : 45 : 45$

καὶ . . . . $72 - 45 : 24 - 15 : : 45 : 15$

διὰ τὴν ἰσότητα τῶν δευτέρων λόγων συνάγομεν τὴν τρίτην

$$72+45 : 24+15 : : 72-45 : 24-15.$$

καὶ μεταθέσει τῶν μέσων ἔχομεν

$$72+45 : 72-45 : : 24+15 : 24-15$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἕπεται, ὅτι εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἰδίων, ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

272. Ἐκ τῆς προμνησθείσης ἰδιότητος ἕπονται καὶ αἱ ἑξῆς ἀρχαί.

Α΄. Ἔστω $\alpha : \beta : : \gamma : \delta : : \varepsilon : \zeta : : \eta : \theta \ldots$

σειρά τις ἴσων λόγων τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$

Ἐπειδὴ οἱ τέσσαρες πρῶτοι ὅροι συγκροτοῦντες τὴν ἀναλογίαν

$$\alpha : \beta : : \gamma : \delta$$

δίδουσι $\alpha+\gamma : \beta+\delta : : \gamma : \delta.$

Καὶ ἐπειδὴ $\gamma : \delta : : \varepsilon : \zeta.$

Δι᾽ ἀντικαταστάσεως τοῦ λόγου $\gamma : \delta$ συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν $\alpha+\gamma : \beta+\delta : : \varepsilon : \zeta.$

Καὶ ἐφαρμόζοντες ἐπ᾽ αὐτῆς ὡσαύτως τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθ. 270 λαμβάνομεν $\alpha+\gamma+\varepsilon : \beta+\delta+\zeta : : \varepsilon : \zeta.$

Καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν $\varepsilon : \zeta : : \eta : \theta.$

διὰ τὴν ἰσότητα τῶν λόγων συνάγομεν παρομοίως

$$\alpha+\gamma+\varepsilon : \beta+\delta+\zeta : : \eta : \theta.$$

Καὶ ὁμοίως $\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta : : \beta+\delta+\zeta+\theta : : \eta : \theta.$ κτλ.

Τουτέστιν εἰς σειράν τινα ἴσων λόγων τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων, ὡς εἷς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ.

Β΄. Ἔστωσαν τὰ δύο ἴσα κλάσματα $\frac{9}{12}$ καὶ $\frac{3}{4}$ ἐκ τῆς ἰσοπηλικότητος $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ προκύπτει ἡ ἀναλογία $9 : 12 : : 3 : 4$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $9+3 : 12+4 : : 3 : 4.$

μεταφέροντες αὐτὴν εἰς τὴν ἰσοδύναμον παράστασιν $\dfrac{9+3}{12+4} = \frac{3}{4}$ συνάγομεν, ὅτι ἐὰν δύο ἴσων κλασμάτων, προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τοὺς παρανομαστὰς καὶ γράψωμεν τὸ δεύτερον ἄθροισμα παρονομαστὴν τοῦ πρώτου, θέλομεν συγκροτήσει ἰσοδύναμον κλάσμα.

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ περισσότερα κλάσματα.

Ἔστω π. χ. $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}=\frac{30}{36}=\frac{35}{42}$ κτλ.
ἐκ τῆς ἰσοπηλικότητος ταύτης προκύπτει ἡ ἑξῆς ἀναλογία

$$5 : 6 : : 10 : 12 : : 30 : 36 : : 35 : 42 \text{ κτλ.}$$

ὅθεν ἔχομεν $5+10+30+35 : 6+12+36+42 : : 5 : 6.$

Ἑπομένως $\dfrac{5+10+30+35}{6+12+36+42}=\dfrac{5}{6}.$

273. Δεδομένων ὁσωνδήποτε ἀναλογιῶν, ἂν πολυπλασιάσωμεν αὐτὰς πρὸς ἀλλήλας ὅρον ἐφ᾽ ὅρον, καθ᾽ ἣν εὑρίσκονται τάξιν, τὰ γινόμενα ταῦτα θέλουσι συστήσει ὡσαύτως ἀναλογίαν.

Ἔστωσαν αἱ ἀναλογίαι

$$3 : 8 : : 12 : 32$$
$$7 : 15 : : 28 : 60$$
$$40 : 12 : : 50 : 15.$$

Ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι αὗται ἰσοδυναμοῦσι μὲ τὰς ἰσοπηλικότητας.

$$\frac{3}{8}=\frac{12}{32}$$
$$\frac{7}{15}=\frac{28}{60}$$
καὶ $$\frac{40}{12}=\frac{50}{15}.$$

πολυπλασιάζοντες μέλος πρὸς μέλος λαμβάνομεν

$$\frac{3\times7\ \times40}{8\times15\times12}=\frac{12\times28\times50}{32\times60\times15}$$

Ἐκ τούτου προκύπτει ἡ ἀναλογία τῶν γινομένων

$$3\times7\times40 : 8\times15\times12 : : 12\times28\times50 : 32\times60\times15.$$

ἢ μᾶλλον $840 : 1440 : : 16800 : 28800.$

Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι ὁ λόγος τῆς προκυπτούσης ταύτης ἀναλογίας εἶναι σύνθετος ἐξ ὅλων τῶν λόγων τῶν πολυπλασιαζομένων ἀναλογιῶν.

274. Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ἕπεται ἄμεσος συνέπεια, ἂν τέσσαρες ἀριθμοὶ συνιστῶσιν ἀναλογίαν, πρέπει καὶ τὰ τετράγωνα, ἢ οἱ κῦβοι, ἢ οἱαιδήποτε ὁμοβάθμιοι δυνάμεις αὐτῶν, νὰ σχηματίζωσιν ὡσαύτως.

Π. χ. ὑπαρχούσης τῆς ἀναλογίας $\alpha : \beta : : \gamma : \delta.$
ἔχομεν ὡσαύτως καὶ $\alpha^2 : \beta^2 : : \gamma^2 : \delta^2.$
καὶ ἐν γένει $\alpha^\mu : \beta^\mu : : \gamma^\mu : \delta^\mu.$

Διότι ἀντὶ τῶν διαφόρων ἀναλογιῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν εἰς πολυπλασιασμὸν, ἀρκεῖ νὰ ὑποθέσωμεν αὐτὰς ἴσας, ἢ μᾶλλον μίαν μόνην, ἐπαναλαμβανομένην δὶς καὶ πολλάκις· ὅθεν πορίζόμεθα τὴν προταθεῖσαν ἀρχήν.

275. Ἀντιστρόφως, ἂν τέσσαρες ἀριθμοὶ συνιστῶσιν ἀναλογίαν, καὶ αἱ ὁμοβάθμιοι ῥίζαι αὐτῶν ὑπάρχουσιν ὡσαύτως εἰς ἀναλογίαν.

Διότι ἔστω ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$.

Ἐπειδὴ δι' αὐτῆς ἐκφράζεται ἡ ἰσότης $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

συνάγομεν ὡσαύτως καὶ $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}$, ἤτοι $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\delta}}$

ἐξ οὗ ἕπεται $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\gamma} : \sqrt{\delta}$.

Τὸ αὐτὸ λέγομεν καὶ διὰ τὴν κυβικὴν καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην ῥίζαν τῶν ὅρων.

276. Ἐπὶ τῆς τελευταίας ταύτης προτάσεως ἀνάγκη νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ὁσάκις οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας ἦναι τέλειαι δυνάμεις τῆς ἐξαγομένης ῥίζης, ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις εἶναι ἀναντίῤῥητος. Ἀλλ' ὅταν οἱ ὅροι ἦναι ἀτελεῖς δυνάμεις, τότε ἐγείρεταί τις ἀμφιβολία, πῶς ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα, ὑποβάλλονται εἰς ἀναλογίαν, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἀναφέρονται ἅπασαι αἱ προηγηθεῖσαι ἰδιότητες. Ἀλλ' αἴρεται ἡ ἀμφιβολία αὕτη, ὅταν ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι ἡ ἀσύμμετρος ποσότης, ἐκτιμωμένη καθ' ὅσον θέλομεν ἐλάχιστον ὅριον προσεγγίσεως πρὸς τὸ ἀκριβές, δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς ἀκριβὴς ῥίζα τῆς ἀτελοῦς δυνάμεως. Κατ' αὐτὸν τὸν λόγον ἐκλαμβάνοντες τὰς ἀσυμμέτρους ῥίζας ὡς συμμετρικὰς παραδεχόμεθα τὴν σύστασιν ἀναλογίας μεταξὺ ἀριθμῶν πολλὰ ἐκτεταμένων, καὶ τῶν ὁποίων ἡ σχέσις δὲν διασείεται ὡς ἐκ τοῦ παρορωμένου πολλοστημορίου.

§. δ'. Περὶ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

277. Ὀνομάζομεν μέθοδον τῶν τριῶν τὴν πρᾶξιν διὰ τῆς ὁποίας προσδιορίζομεν ἕνα τῶν ὅρων τῆς ἀναλογίας, ὅταν οἱ τρεῖς ἄλλοι ἦναι γνωστοί, καὶ ἐπειδὴ τὸ ζήτημα τοῦτο ἐλύθη ἤδη (ἀριθ. 263), ἄρα ὑπολείπεται μόνον ἐνταῦθα ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ γενικοῦ τούτου ζητήματος εἰς τὴν λύσιν διαφόρων προβλημάτων, καὶ εἰς τοῦτο ἀφορᾷ κυρίως ἡ μέθοδος, περὶ ἧς ὁ λόγος. Τὰ ἑπόμενα παραδείγματα αἰτιολογοῦσι τὴν χρείαν τῆς λεπτομερεστέρας ταύτης ἐρεύνης.

Ζήτημα Α'.—Διὰ 15 πήχεις ὑφάσματος ἐπληρώσαμεν δραχμὰς 130· πόσον πρέπει νὰ πληρώσωμεν διὰ 18 πήχεις τοῦ αὐτοῦ εἴδους;

Ἀνάλυσις.—Ἂν ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἦτο γνωστή, ἤρκει νὰ πολυπλασιάσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην ἐπὶ 18, ἀριθμὸν τῶν πήχεων, καὶ τὸ γινόμενον ἤθελεν ἐκφράζει τὸ ζητούμενον ἀντίτιμον αὐτῶν. Ἀλλ' ἐκ τῶν συνθηκῶν τοῦ προβλήματος ἡ τιμὴ αὕτη γίνεται γνωστή. Διότι ἂν 15 πήχεις ἐτιμήθησαν δραχ. 130· ἄρα ὁ πῆχυς ἐτιμήθη τὸ δέκατον πέμπτον τοῦ 130. Οὕτως 130 διὰ τοῦ 15, ἤτοι $8\frac{2}{3}$. εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως. Ὅθεν λαμβάνοντες αὐτὴν δέκα καὶ ὀκτάκις, ἤτοι πολυπλασιάζοντες ἐπὶ 18, εὑρίσκομεν δραχμ. 156 διὰ τὸ ζητούμενον ἀντίτιμον τῶν 18 πήχεων.

Πρόβλημα Β'.—Ταχυδρόμος, διανύσας 50 στάδια εἰς 8 ὥρας, πόσα θέλει διανύσει εἰς 11 ὥρας ὁδοιπορῶν μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα;

Ἀνάλυσις. — Συλλογιζόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον, ὅτι εἰς μίαν ὥραν διανύει τὸ ὄγδοον τῶν 50 σταδίων, τουτέστι $\frac{50}{8}=6\frac{1}{4}$. Ὅθεν εἰς 11 ὥρας διανύει ἐνδεκάκις τὰ $6\frac{1}{4}$, ἤτοι $68\frac{3}{4}$ στάδια.

Πρόβλημα Γ'.—Ταχυδρόμος διανύσας ἰσοταχῶς 50 ςάδια εἰς 8 ὥρας, εἰς πόσον χρόνον θέλει διανύσει τὰ 22;

Φανερὸν ὡσαύτως, ὅτι ἂν ἦτο γνωστὸς ὁ χρόνος, καθ' ὃν διήνυσεν ἓν στάδιον, ἠθέλομεν λάβει τὸν χρόνον τοῦτον εἴκοσι καὶ δίς· τὸ δὲ ἐξαγόμενον ἤθελε παραστήσει τὸν ζητούμενον χρόνον διὰ τὰ 22 στάδια· ἀλλ' ἔχομεν ἀπὸ τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, ὅτι 50 στάδια διήνυσεν εἰς 8 ὥρας· ἄρα δι' ἓν στάδιον ἐδαπάνησε τὸ πεντηκοστὸν τοῦ χρόνου τούτου, τουτέστιν $\frac{8}{50}=\frac{4}{25}$ τῆς ὥρας, ἢ 9' καὶ 36''· ὅθεν πολυπλασιάζοντες ἐπὶ 22 στάδια εὑρίσκομεν διὰ τὸν ζητούμεεον χρόνον 3^{ω}, 31', 12''.

278. Διὰ τοιαύτης ἀναλύσεως προσδιορίζομεν τὴν ἄγνωστον εἰς τὰ ζητήματα ταῦτα καὶ τὰ ὅμοια· ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ καὶ οἱ ζητούμενοι συνεξαρτῶνται δι' ἀναλογικῶν σχέσεων, δυνάμεθα διὰ τῆς ὑποστρώσεως τῶν ἀναλογιῶν νὰ καταστήσωμεν τὴν λύσιν αὐτῶν εὐχερεστέραν καὶ γενικὴν εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις. Π. χ. εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα, ἐπειδὴ διὰ τὸ διπλοῦν, ἢ τὸ τριπλοῦν ἢ πολυπλάσιόν τι τῶν 15 πήχεων, πρέπει νὰ πληρώσωμεν δίς, τρὶς ἢ τοσάκις τὰς δραχμ. 130· καὶ ὡσαύτως διὰ τὸ ἥμισυ ἢ τὸ τρίτον κτλ. πρέπει νὰ δώσωμεν τὸ ἥμισυ, ἢ τὸ τρίτον τοῦ 130, εἶναι ἐκ τούτου πρόδηλον, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου τεμαχίου τοῦ ὑφάσματος ἐμπεριέχεται εἰς τὴν τοῦ ἑτέρου, ὡς τὸ μῆκος τοῦ πρώτου εἰς τὸ τοῦ δευτέρου· τουτέστιν αἱ τιμαὶ τῶν ὑφασμάτων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ μήκη. Ὅθεν εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ προηγουμένου ζητήματος συνιστῶμεν τὴν ἀναλογίαν· $15 : 18 :: 130 : \chi$ (χ παριστάνει τὴν ἄγνωστον τιμὴν τῶν 18 πήχεων).

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $\chi=\dfrac{18\times130}{15}=6\times26=156$.

Ὁμοίως εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα, ἐπειδὴ τὰ διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς δαπανωμένους χρόνους ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

8 ὧραι πρὸς 11 ὥρας, οὕτω 50 στάδια πρὸς τὰ ἄγνωστα στάδια, τουτέστιν $8 : 11 :: 50 : \chi$.

Ἐκ τούτου προκύπτει $\chi = \frac{11\times 50}{8} = \frac{25\times 11}{4} = \frac{275}{4} = 68\,\frac{3}{4}$.

Τέλος διὰ τὸ τρίτον πρόβλημα προσδιορίζομεν τὸν ζητούμενον χρόνον διὰ τῆς ἀναλογικῆς σχέσεως τῶν διαστημάτων πρὸς τοὺς χρόνους ὑποστρώνοντες τὴν ἀναλογίαν.

$$50 : 22 :: 8 : \chi, \text{ ἐξ ἧς } \chi = \frac{22\times 8}{50} = 3^{\omega},\ 31',\ 12''.$$

279. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἕπεται, ὅτι ἅπασα ἡ δυσκολία τῆς ἐπιλύσεως τῶν τοιούτων προβλημάτων συνίσταται εἰς τὸν τρόπον τῆς ὑποστρώσεως τῆς ἀναλογίας, ἀλλ᾽ ἔχομεν κανόνας ἀσφαλεῖς τοῦ σχηματισμοῦ αὐτῆς δι᾽ ὅλας τὰς περιστάσεις.

Τῷ ὄντι μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, τῶν εἰσερχομένων εἰς τὴν ἀναλογίαν, οἱ μὲν δύο πρῶτοι ἐκφράζουσι ποσότητας ἑνὸς εἴδους, οἱ δὲ δύο ἄλλοι, ὁμοειδεῖς πρὸς ἀλλήλους, ἐκφράζουσι ποσότητας διαφόρου εἴδους. Οὕτως εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγμαaα οἱ μὲν δύο παριστάνουσι πήχεις ἢ στάδια, οἱ δὲ δύο ἄλλοι δραχμὰς ἢ χρόνους.

Ἀφ᾽ οὗ λοιπὸν διακρίνωμεν κατὰ πρῶτον τοὺς δύο ὅρους ἑκατέρου εἴδους, θέλομεν ἔχει ἀναγκαίως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλητέρου ὅρου τοῦ δευτέρου εἴδους διὰ τοῦ ὁμοειδοῦς μικροτέρου ἴσον μὲ τὸ πηλίκον τοῦ μεγαλητέρου ὅρου τοῦ πρώτου εἴδους, διαιρουμένου διὰ τοῦ δευτέρου ὁμοειδοῦς. Ἐκ τῆς ἰσοπηλικότητος δὲ ταύτης παράγεται ἡ ἀναλογία.

Ὁ ἐλάσσων ὅρος τοῦ πρώτου εἴδους, ἐμπεριέχεται εἰς τὸν μείζονα ὅρον τοῦ αὐτοῦ εἴδους, ὡς ὁ ἐλάσσων τοῦ δευτέρου εἴδους, εἰς τὸν μείζονα τοῦ αὐτοῦ εἴδους.

280. Ἔστωσαν χάριν ἐφαρμογῆς καὶ τὰ ἑξῆς ζητήματα.

Πρόβλημα—Δ΄. Τεχνίτης ἐργασθεὶς 9 ἡμέρας ἐτελείωσε πήχεις 217,5 ἑνός τινος ἔργου· ζητεῖται εἰς πόσον χρόνον θέλει τελειώσει τοὺς πήχεις 423, ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἔργου;

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἔχομεν.

Ὁ ἐλάσσων τοῦ πρώτου εἴδους	217,5
πρὸς τὸν μείζονα ὁμοειδῆ	423,9
Οὕτως ὁ ἐλάσσων τοῦ δευτέρου εἴδους	9
πρὸς τὸν ἄγνωστον μείζονα	χ·

Τουτέστι $217,5 : 423,9 : : 9 : χ$.

$$\text{Ὅθεν } χ = \frac{4239 \times 9}{2175} = \frac{38151}{2175} = 17 \text{ ἡμ. } \tfrac{1176}{2175}.$$

Πρόβλημα Ε΄.—Ἐπληρώσαμεν 143 λ. 15 σελ. 8 δην. διὰ 825 λίτρας 1 ἡμ. 7 οὐγ. ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ δώσωμεν διὰ 500 λίτρ. 0 ἡμ. 5 οὐγ.

Ὑπαρχούσης προδήλου τῆς ἀναλογικῆς σχέσεως τοῦ βάρους πρὸς τὴν τιμὴν, συνιστῶμεν ὡσαύτως τὴν ἀναλογίαν 825 λίτ. 1 ἡμίλιτρ. 7 οὐγ. : 500 λίτ. 0 ἡμ. 5 οὐγ. : : 143 λίρ. 15 σελ. 8 δην. : χ.

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο καὶ τὰ ὅμοια ἐπιτέμνομεν τοὺς ὑπολογισμοὺς ἀνάγοντες τοὺς δύο πρώτους εἰς μονάδας τῆς τελευταίας ὑποδιαιρέσεως, ἤτοι οὐγγίας, οὕτως ἔχομεν

$$13215 : 8005 : : 143,\ 15,\ 8 : χ.$$

$$\text{Ὅθεν } χ = \frac{143,\ 15,\ 8 \times 8005}{13215} = 87 \text{ λίρ. } 1 \text{ σελ. } 11 \text{ δην. ὡς ἔγγιστα}$$

ἑνὸς δηναρίου.

Πρόβλημα Ϛ΄.—Ὡρολόγιον προχωροῦν 2΄, 35΄΄ εἰς 3 ὥρας 15΄· ζητεῖται πόσον θέλει προχωρήσει μετὰ 24 ὥρας.

Ἀπόκρ. 19 λεπτὰ 4 δεύτερα καὶ $\frac{8}{13}$.

Πρόβλημα Ζ΄. — Ὡρολόγιον δεικνύει ἀκριβῶς τὴν μεσημβρίαν, ἀλλὰ προχωρεῖ 2 $\frac{1}{2}$ λεπτὰ εἰς 3 ὥρας· Ζητεῖται μετὰ πόσον χρόνον θέλει συμφωνήσει εἰς τὸν ἀληθῆ χρόνον;

Ἀπόκρ. Μεθ' ὥρας 864.

Πρόβλημα Η΄.—Ὑπεσχέθημεν βραβεῖον εἰς ἐργάτην, ὅστις ἤθελε τελειώσει 156 πήχεις εἰς 18 ἡμέρας. Ἂν εἰς τὰς 4 πρώρας ἡμέρας ὁ ἐργάτης ἐτελείωσε μόνον 33 πήχεις, ἐλπίζει νὰ τύχῃ τῆς ἀμοιβῆς, καὶ κατὰ πόσον καθυστερεῖ εἰς τὴν ἐργασίαν;

Ἀπόκρ. Καθυστέρησε κατὰ 7 πήχ. $\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα Θ΄.—Ἐκ δύο κρηνῶν ἡ μὲν χύνει 15 λίτρ. εἰς 2 λεπτὰ· ἡ δὲ 27 λίτρ. εἰς 3 λεπ. καὶ 36 δεύτερα· ποία εἶναι ἡ ἀφθονωτέρα;

Ἀπόκρ. Εἶναι ἰσοδύναμοι.

Πρόβλημα Ι΄.—Ἠγοράσαμεν βιβλία πρὸς δραχ. 8, 50 τὸ ἀντίτυπον, λαμβάνοντες εἰς 12 ἀντίτυπα τὸ δέκατον τρίτον δωρεὰν, πόση γίνεται ἡ συγκατάβασις;

Ἀπόκρ. Λεπτὰ 65 ὡς ἔγγιστα.

§. έ. Περὶ τῆς ἀντιστρόφου μεθόδου τῶν τριῶν.

281. Ἐκ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν τῶν ἀναφερομένων εἰς πρόβλημά τι τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἐξ ὧν ὁ εἷς εἶναι ἄγνωστος, οἱ μὲν δύο παριςῶσιν ἕν τι εἶδος, οἱ δὲ ἄλλοι ἄλλο· ἀλλὰ κατὰ τὴν συνθήκην τοῦ προβλήματος οἱ δύο ἀριθμοὶ τοῦ πρώτου εἴδους συσχετίζονται πρὸς τοὺς δύο τοῦ ἑτέρου, καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμὸς τοῦ δευτέρου ἀναφέρεται εἰς τὸν πρῶτον τοῦ πρώτου εἴδους, ὁ δὲ δεύτερος τοῦ δευτέρου εἰς τὸν πρῶτον τοῦ πρώτου. Τοὺς δύο οὕτω συσχετικοὺς ἀριθμοὺς ὀνομάζομεν ὁμολόγους.

Π. χ. εἰς τὸ πρῶτον ζήτημα οἱ μὲν ἀριθμοὶ 15 πήχεις καὶ 130 δραχ. εἶναι οἱ πρῶτοι ὁμόλογοι. Παρομοίως λέγομεν καὶ περὶ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἄλλων προβλημάτων.

Τούτου τεθέντος, λέγομεν ὅτι ὑπάρχει εὐθεῖα σχέσις μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν τοῦ πρώτου εἴδους καὶ τῶν δύο τοῦ δευτέρου, ἢ μᾶλλον ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι εἰς εὐθὺν λόγον πρὸς τοὺς ὁμολόγους αὐτῶν εἰς τὸ ἕτερον εἶδος, ὅταν, γνωσθείσης τῆς ἀναλογίας μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τοῦ ζητήματος, ἀναγνωρίσωμεν πρὸς τούτοις, ὅτι αὐξανομένου ἢ ἐλαττουμένου τοῦ ἑνὸς εἰς τὸ πρῶτον εἶδος, αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται ὁ ὁμόλογος αὐτοῦ εἰς τὸ ἕτερον. Τοιαύτης δὲ εὐθείας σχέσεως εἶναι ὅλα τὰ προεπιλυθέντα ζητήματα, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν ἑκάστου.

Ἀλλὰ δίδονται προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ σχέσις τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀντίστροφος, τουτέστιν αὐξανομένου ἢ ἐλαττουμένου τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ τοῦ πρώτου εἴδους, ἐλαττοῦται ἢ αὐξάνει ὁ ὁμόλογος αὐτοῦ εἰς τὸ ἕτερον.

282. Ἡ ἀνάλυσις τῶν ἑξῆς ζητημάτων θέλει διευκρινίσει ἐπὶ μᾶλλον τὸν σκοπὸν τῆς παρούσης μεθόδου, καὶ θέλει χορηγήσει γενικὸν κανόνα δι' ὅλα τὰ τοιαῦτα ζητήματα.

Πρόβλημα Α΄.—Ἂν 15 ἐργάται περαίνουσιν ἔργον εἰς 17 ἡμέρας, εἰς πόσας θέλουσι περάνει τὸ αὐτὸ ἔργον οἱ 24 ἐργάται ἐργαζόμενοι ὁμοίως;

Ἀνάλυσις.—Ἐπειδὴ διὰ 15 ἐργάτας ἀπαιτοῦνται 17 ἡμέραι, ἄρα διὰ τὸν ἕνα ἀπαιτεῖται δεκαπενταπλάσιος χρόνος, τουτέστιν 17×15, ἤτοι 255 ἡμέραι. Καὶ ἐπειδὴ ἐργάζονται περισσότεροι ἐργάται, ἐπιτέμνεται ὁ χρόνος καὶ διὰ μὲν τοὺς δύο κατὰ τὸ ἥμισυ, διὰ δὲ τοὺς τρεῖς κατὰ τὸ τρίτον κτλ. καὶ τέλος διὰ τοὺς 24 τὸ $\frac{1}{24}$ τοῦ χρόνου, ὅθεν τὸ $\frac{1}{24}$ τῶν 255, ἤτοι $\frac{255}{24}$, ἢ 10 ἡμ. καὶ $\frac{5}{8}$ εἶναι ὁ ζητούμενος χρόνος.

Πρόβλημα Β΄. — Φρουρὰ ἔχουσα τροφὰς διὰ 20 ἡμέρας ἀναγκάζεται νὰ τραφῇ διὰ 35, ὡς ἐκ πολιορκίας· Πόσον πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ τὸ σιτηρέσιον ἑκάστου;

Ἀνάλυσις.—Ἂν αἱ τροφαὶ ἦναι διὰ μίαν ἡμέραν, φανερὸν, ὅτι ἕκαστον ἄτομον ἔπρεπε νὰ δαπανήσῃ τὸ $\frac{1}{35}$ τοῦ ἑνὸς σιτηρεσίου. Ἐπειδὴ δὲ ὑπάρχουσιν 20 σιτηρέσια διὰ τὰς 20 ἡμέρας, ἄρα δύναται νὰ δαπανᾷ εἰκοσάκις τὸ $\frac{1}{35}$, ἤτοι $\frac{20}{35}$ ἢ $\frac{4}{7}$ τοῦ σιτηρεσίου.

Πρόβλημα Γ'. — Διὰ 15 πήχεις ὑφάσματος, ἔχοντος πλάτος $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως, ἐπληρώσαμεν 40 δραχ. Ζητεῖται μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν πόσους πήχ. δυνάμεθα νὰ ἀναλογίσωμεν εἰς ὕφασμα, ἔχον πλάτος $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως.

Ἀνάλυσις.—Ἐπειδὴ τὸ πλάτος τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{3}{4}$ ἢ $\frac{6}{8}$, ἄρα ἕκαστος πῆχυς τοῦ πρώτου ὑφάσματος ἰσοδυναμεῖ μὲ 6 πήχεις ἑτέρου, ἔχοντος πλάτος $\frac{1}{8}$· ἐπομένως οἱ 15 πήχεις φέρουσιν 90 τοιαύτας ταινίας. Καὶ ἐπειδὴ ἐξ ἑκάςου πήχεως τοῦ δευτέρου ὑφάσματος, τοῦ ἔχοντος $\frac{5}{8}$ πλάτος, λαμβάνομεν 5 πήχεις $\frac{1}{8}$ πλάτους, διὰ τοῦτο διαιροῦντες τὸν 90 διὰ τοῦ 5 εὑρίσκομεν πηλίκον 18, διὰ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν πήχεων, ἰσοτιμώμενον μὲ τοὺς 15 πήχεις.

283. Ἀλλ' ἀντὶ νὰ ἐξερευνῶμεν ἑνὸς ἑκάστου τὰς σχέσεις δι' ἰδιαζούσης ἀναλύσεως, δυνάμεθα νὰ ὑποβάλωμεν ὅλα ταῦτα εἰς τὸ γενικὸν ζήτημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν· ὑποστρώνοντες δὲ τὴν ἀναλογίαν προσδιορίζομεν τὸν τέταρτον ἄγνωστον κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα. Ἰδοὺ ἡ λύσις τῶν αὐτῶν ζητημάτων.

Α'. Ἐπειδὴ διὰ τὸν διπλοῦν ἢ τριπλοῦν ἀριθμὸν τῶν ἐργατῶν ἀπαιτεῖται ὁ ὑποδιπλάσιος, ἢ ὁ ὑποτριπλάσιος χρόνος, ὑπάρχει ἄρα καὶ ἐνταῦθα ἡ ἀναλογία, ἀλλὰ κατ' ἀντίθετον ἔννοιαν· δηλαδὴ ὁσάκις ὁ 24, δεύτερος ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν, ἐμπεριέχει τὸν 15, ἀριθμὸν τῶν πρώτων, τοσάκις ὁ 17 πρῶτος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἐμπεριέχει τὸν δεύτερον ἄγνωστον.

Ἐκ τούτου ἐξάγεται ἡ ἰσοπηλικότης $\frac{24}{15} = \frac{17}{\chi}$·

ἐξ ἧς προκύπτει ἡ ἀναλογία $24 : 15 :: 17 : \chi$.

ὅθεν $\chi = \dfrac{15 \times 17}{24} = \frac{85}{8} = 10\frac{5}{8}$.

Εἰς τὴν ἀναλογίαν ταύτην οἱ δύο ὁμόλογοι 15 καὶ 17 καὶ ὁμοίως οἱ 24 καὶ χ κατέχουσιν, οἱ μὲν τὰ δύο μέσα, οἱ δὲ τὰ δύο ἄκρα τῆς ἀναλογίας, ἐν ᾧ εἰς τὴν εὐθεῖαν κατέχουσιν ἓν ἄκρον καὶ ἓν μέσον.

Μόνη ἡ διάταξις αὕτη τῶν ὅρων ἑρμηνεύει τὴν ἀντίστροφον σχέσιν· διότι ἀντὶ 24 ἔστωσαν 45 οἱ δεύτεροι ἐργάται· οὕτως ὁ λόγος τῶν δευτέρων ἡμερῶν πρὸς τὰς πρώτας $\dfrac{\chi}{17}$ πρέπει νὰ ἦναι $\frac{1}{3}$ τουτέσιν $\dfrac{\chi}{17} = \frac{1}{3}$.

ὅθεν ὅπως συμβιβάσωμεν τὴν ἰσότητα τῶν λόγων, πρέπει νὰ ἀνατρέψωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος, καὶ οὕτως ἔχομεν $\frac{17}{\chi} = \frac{3}{1}$. Ἐπομένως συγκροτεῖται ἡ ἰσοπηλικότης $\frac{45}{15} = \frac{17}{\chi}$, ἐξ ἧς προκύπτει ἡ ἀναλογία $45 : 15 :: 17 : \chi$.

$$\text{ὅθεν } \chi = \frac{15 \times 17}{45} = \frac{17}{3} = 5\tfrac{2}{3}.$$

Ἐν γένει, ἐπειδὴ εἰς τὴν ἀντίστροφον σχέσιν πρέπει νὰ ἀντιστρέφωμεν τὸν λόγον τῶν δύο ὁμολόγων, παριστανόμενον κλασματικῶς, ἡ δὲ ἀντιστροφὴ αὕτη γίνεται διὰ τῆς ἀνατροπῆς τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος· διὰ τοῦτο καὶ εἰς τὰς ἀναλογίας τῆς ἀντιστρόφου σχέσεως, μεταβάλλομεν τὴν τάξιν τῶν ὁμολόγων εἰς ἄκρα ἢ εἰς μέσα. Ἡ διάταξις δὲ αὕτη ἑρμηνεύει εἰς τὴν ἀναλογίαν, ὅτι ἡ ἀνατροπὴ τῶν ὅρων τοῦ ἑνὸς λόγου εἰς τὴν ἰσοπηλικότητα, ἢ μᾶλλον αὐτὴν τὴν ἀντίστροφον σχέσιν.

Β΄. Σκεπτόμενοι παρομοίως λέγομεν. Ἐπειδὴ εἰς τὸ διπλοῦν ἢ τριπλοῦν τῶν ἡμερῶν ἀναφέρεται τὸ ἥμισυ, ἢ τὸ τρίτον τοῦ σιτηρεσίου εἰς ἕκαστον ἄτομον, ὑπάρχει ἄρα ἀντίστροφος σχέσις μεταξὺ τῶν ὁμολόγων. Ὅθεν σημειοῦντες τὸ κανονικὸν σιτηρέσιον διὰ τοῦ 1 καὶ τὸ ἄγνωστον διὰ χ ἐκφράζομεν τὸν λόγον αὐτῶν διὰ τοῦ $\frac{1}{\chi}$ καὶ ἀνατρέποντες τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{20}{35}$, τοῦ ἐκφράζοντος τὸν λόγον τῶν χρόνων, εἰς $\frac{35}{20}$ συνάγομεν $\frac{35}{20} = \frac{1}{\chi}$, ἢ $35 :: 20 : 1 : \chi$: καὶ $\chi = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$.

Γ΄. Ἐπειδὴ διπλασιαζομένου ἢ τριπλασιαζομένου τοῦ πλάτους, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ ἢ τὸ τρίτον τοῦ μήκους, ἄρα ἡ σχέσις εἶναι ἀντίστροφος. Ἐπομένως ὁ $\frac{5}{8}$ ὁμόλογος τοῦ ἀγνώστου χ ἔχει λόγον πρὸς τὸν $\frac{3}{4}$, ἢ $\frac{6}{8}$ ὁμόλογον τοῦ 15, ὡς ὁ 15 πρὸς τὸν ἄγνωστον, ἤτοι $\frac{5}{8} : \frac{6}{8} :: 15 : \chi$, ἢ $5 : 6 :: 15. \chi$.

$$\text{Ἐξ ἧς προκύπτει } \chi = \frac{6 \times 15}{5} = 18.$$

284. Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ ἀνωτέρω λέγομεν. Ἵνα γνωρίσωμεν ἂν πρόβλημά τι ὑπάγεται εἰς τὴν εὐθεῖαν ἢ τὴν ἀντίστροφον μέθοδον τῶν τριῶν, ἀναλύομεν τὰς σχέσεις αὐτοῦ. Ὅθεν ὁσάκις ἡ αὔξησις ἢ ἡ ἐλάτ-

τωσις τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ τοῦ πρώτου εἴδους ἐπιφέρει αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν εἰς τὸν ὁμόλογον αὐτοῦ εἰς τὸν ἕτερον, τότε ἡ σχέσις εἶναι εὐθεία καὶ ἐπομένως ὑποστρώνυται ἡ ἀναλογία, γραφομένων τῶν μὲν δύο ὁμολόγων ὡς ἡγουμένων, τῶν δὲ ἄλλων ὡς ἑπομένων.

Ὁσάκις δὲ ἡ αὔξησις ἢ ἡ ἐλάττωσις τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ τοῦ πρώτου εἴδους ἐπιφέρει τὸ ἀνάπαλιν ἐλάττωσιν ἢ αὔξησιν εἰς τὸν ὁμόλογον αὐτοῦ εἰς τὸ ἕτερον, τότε ἡ σχέσις εἶναι ἀντίστροφος. Ἐπομένως ὑποστρώνομεν τὴν ἀναλογίαν γράφοντες τοὺς μὲν δύο ὁμολόγους εἰς τὰ ἄκρα, τοὺς δὲ ἑτέρους εἰς τὰ μέσα τῆς ἀναλογίας.

285. Ἰδοὺ καὶ ἕτερα παραδείγματα.

Πρόβλημα Δ'. — Ὁδοιπόρος περιπατῶν 8 ὥρας τὴν ἡμέραν φθάνει εἰς ὡρισμένον μέρος μετὰ 9 ἡμέρας. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ περιπατήσῃ, ὅπως φθάσῃ μετὰ 7 ἡμέρας;

Ἀνάλυσις. — Ἐπειδὴ ἐπιτέμνεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, πρέπει νὰ ἀναπληρωθῇ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὡρῶν· ὅθεν ἡ σχέσις εἶναι ἀντίςροφος. Σημειοῦντες λοιπὸν τὸν ἄγνωςον διὰ χ, γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸν λόγον 8 : χ. εἶτα δὲ γράφομεν πρῶτον ἄκρον τὸν ὁμόλογον τοῦ ἀγνώστου καὶ πρῶτον μέσον τὸν ὁμόλογον τοῦ 8. Ὅθεν 7 : 9 : : 8 : χ.

Ἐξ ἧς $\chi = \dfrac{8 \times 9}{7} = \frac{72}{7} = 10$ ὥρας $\frac{2}{7}$.

Πρόβλημα Ε'.—Κρήνη ῥέουσα 45 $\frac{1}{2}$ μνᾶς εἰς μίαν ὥραν γεμίζει δεξαμενὴν εἰς 27 ὥρας, ζητεῖται εἰς πόσας ὥρας ἄλλη τις, ῥέουσα 63 $\frac{3}{4}$ μνᾶς εἰς μίαν ὥραν, γεμίζει τὴν αὐτὴν δεξαμενήν;

Ἀνάλυσις. — Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν· κατασκευάζοντες κατὰ πρῶτον τὸν λόγον 27 : χ, ἀνατρέπομεν τὸν ἕτερον διὰ τὸ ἀντίστροφον τῆς σχέσεως καὶ ἔχομεν

63 $\frac{3}{4}$: 45 $\frac{1}{2}$: : 27 : χ. ἢ 255 : 182 : : 27 : χ.

ὅθεν $\chi = \frac{4914}{255} = 16$ ὥρας 19', 14'' $\frac{30}{255}$.

Πρόβλημα ς'.—Βιβλίον ἐκ 36 τυπογραφικῶν φύλλων πρὸς 28 στίχους εἰς ἑκάστην σελίδα ἀνατυποῦται πρὸς 32 στίχους τὴν σελίδα. Πόση γίνεται οἰκονομία εἰς φύλλα;

Ἀπόκρ. 4 $\frac{1}{2}$ τυπογραφικὰ φύλλα,

Πρόβλημα Ζ'.—Ταχυδρόμος ὁδοιπορῶν 10 ὥρας τὴν ἡμέραν φθάνει εἰς ὡρισμένον σημεῖον μετὰ 7 ἡμέρας, ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ ὁδοιπορήσῃ τὴν ἡμέραν ἵνα φθάσῃ εἰς πέντε ἡμέρας;

Ἀπόκρ. ὥρας 14.

Πρόβλημα Η'.—Ἔργον τι πρέπει νὰ περατωθῇ εἰς 20 ἡμέρας, ἐμισθώθησαν πρὸς τοῦτο 10 ἐργάται καὶ ἐτελείωσαν τὸ $\frac{1}{3}$ εἰς 8 ἡμέρας. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ αὐξήσῃ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν διὰ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἔργου κατὰ τὰς λοιπὰς 12 ἡμέρας;

Ἀπόκρ. ἀντὶ τῶν 10 πρέπει νὰ ἐργασθῶσι 13 ἢ 14 ἐργάται.

Ζήτημα Θ΄.—Ἠγοράσαμεν 200 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 6 δραχ. τὸν πῆχυν. Πόσους πήχεις πωλοῦντες πρὸς δραχ. 6 $\frac{1}{4}$, λαμβάνομεν τὸ ὅλον ποσὸν τῆς ἀγορασίας;

Ἀπόκρ. πήχεις 192.

§. ϛ΄. Περὶ τῆς πολλαπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

286. Εἰς τὰ προηγούμενα προβλήματα ὁ σχηματισμὸς τῆς ζητουμένης ποσότητος ἀπὸ τὴν δεδομένην ὁμοειδῆ ἐξηρτᾶτο ἐκ μιᾶς σχέσεως, ὁποίαν ἐξέφραζεν ὁ λόγος τῶν δύο ἀριθμῶν τοῦ ἑτέρου εἴδους. Ἀλλὰ δίδονται προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἀγνώστου ἐξαρτᾶται ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων τοιούτων σχέσεων. Διὰ τὴν λύσιν αὐτῶν ὑποχρεούμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν πολλάκις τὴν ἐκτεθεῖσαν μέθοδον. Ὅθεν ἡ νέα αὕτη μέθοδος λέγεται πολλαπλῆ ἢ σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν. Ἡ ἀνάλυσις τῶν ἑξῆς ζητημάτων ἐξηγεῖ σαφέστερον τὸν σκοπὸν τῆς μεθόδου.

Πρόβλημα Α΄.—Ἂν τρεῖς ἵπποι εἰς 4 ἡμέρας τρώγουσι 240 μνᾶς χόρτου· πόσον ἀπαιτεῖται ἀναλόγως εἰς 5 ἵππους διὰ 7 ἡμέρας;

Ἀνάλυσις. — Ἐπειδὴ 240 μναῖ δαπανῶνται εἰς 4 ἡμέρας διὰ τρεῖς ἵππους, ἄρα διὰ τὸν ἕνα ἀπαιτεῖται τὸ τριτημόριον ἤτοι $\frac{240}{3}$ ἢ 80 διὰ 4 ἡμέρας· ἑπομένως τὸ τέταρτον τῶν 80, ἤτοι 20, διὰ τὴν μίαν ἡμέραν. Τούτου δοθέντος, διὰ τοὺς πέντε ἵππους εὑρίσκομεν πεντάκις τὸν 20 ἤτοι 100 μνᾶς διὰ μίαν ἡμέραν καὶ τὸ ἑπταπλάσιον αὐτῶν, ἤτοι 700 μνᾶς, διὰ τὰς 7 ἡμέρας.

Πρόβλημα Β΄.—Ἂν μὲ 12 μνᾶς νήματος ὑφαίνεται τεμάχιον 27 πήχεων μήκους ἐπὶ $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως πλάτους, πόσον δύναται νὰ ὑφανθῇ μὲ 20 μνᾶς νήματος ἐπὶ πλάτους $\frac{5}{4}$ τοῦ πήχεως;

Ἀνάλυσις.—Ἐπειδὴ μὲ 12 μνᾶς ἐλάβομεν 27 πήχεις ἐπὶ $\frac{3}{4}$ πλάτους, ἄρα ἠθέλομεν λάβει τρὶς τὸ μῆκος τοῦτο, ἤτοι 81 πήχεις, ἐπὶ πλάτους $\frac{1}{4}$ τοῦ πήχεως. Καὶ ἐπειδὴ τὸ πλάτος τοῦ δευτέρου εἶναι $\frac{5}{4}$· ἄρα μὲ 12 μνᾶς ὑφαίνεται τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν 81, ἤτοι $\frac{81}{5}$· μὲ μίαν δὲ μνᾶν τὸ $\frac{1}{12}$ αὐτῶν ἤτοι $\frac{81}{60}$ τοῦ πήχεως· ἑπομένως μὲ 20 μνᾶς, εἰκοσάκις τὸ κλάσμα τοῦτο, ἤτοι $\frac{1620}{60}$· ἐξαγόμενον ἴσον ὡσαύτως μὲ 27 πήχεις.

Πρόβλημα Γ΄.—Ἐπληρώσαμεν 243, 50 δραχ. διὰ 11 κομμάτια ὑφάσματος ἔχοντα 3, 5 πήχ. μῆκος· πόσον πρέπει νὰ πληρώσωμεν διὰ 72 κομμάτια ὁμοίου ὑφάσματος, ἔχοντος δὲ 2, 4. πήχ. μήκους.

Ἀνάλυσις. — Ἐπειδὴ τὰ τῶν 3, 5 μήκους τιμῶνται 243, 5· ἄρα τὰ αὐτὰ ἑνὸς πήχεως μήκους τιμῶνται $\frac{243,5}{3,5}$ ἑπομένως ἓν τεμάχιον ἐκ τῶν ἑνὸς πήχεως τιμᾶται τὸ ἑνδέκατον, ἤτοι $\frac{243,5}{3,5\times 11}$.

Ἐκ τούτου τὰ 12 θέλουσι τιμηθῇ δωδεκάκις τὴν τιμὴν τοῦ ἑνός, ἤτοι $\frac{243,5\times 12}{3,5\times 11}$

Καὶ τέλος τὰ 12 κομμάτια τὰ ἔχοντα πλάτος 2, 4 πρέπει νὰ τιμηθῶσιν $\frac{243,5\times 12\times 2,4}{3,5\times 11}=\frac{243\ 5\times 12\times 24}{35\times 110}=182,15.$ ὡς ἔγγιστα 0, 01.

287. Ἀντὶ τῆς ἰδιαιτέρας ἀναλύσεως, τὴν ὁποίαν ἀπεδώκαμεν εἰς τὰ ζητήματα ταῦτα δυνάμεθα διὰ τὴν ἐνυπάρχουσαν ἀναλογικὴν σχέσιν τῶν ἀριθμῶν ὑποστρώνοντες τὰς ἀναλογίας νὰ καταστήσωμεν τὴν λύσιν αὐτῶν πολὺ εὐχερεστέραν καὶ γενικὴν δι' ὅλα τὰ ὁμοίου εἴδους ζητήματα. Ἐπαναλαμβάνομεν διὰ τοῦτο τὴν λύσιν αὐτῶν ἁπλούστερον, ὡς ἕπεται.

Α'. Ἐπειδὴ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς προσδιορίζεται ὑπὸ δύο σχέσεων συνάμα, τουτέστιν ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἵππων καὶ τοῦ τῶν ἡμερῶν, ἁπλοποιοῦμεν τὸ ζήτημα παραβλέποντες κατὰ πρῶτον τὴν μίαν σχέσιν, ἐφεξῆς δὲ συνιστῶμεν τὴν ἀναλογίαν καὶ τῆς δευτέρας σχέσεως. Οὕτως ὑποθέτοντες, ὅτι ζητεῖται ἡ τροφὴ καὶ τῶν 5 ἵππων ἐπίσης διὰ 4 ἡμέρας, ἤτοι παρορῶντες τὴν δευτέραν σχέσιν τῶν ἡμερῶν, παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἄγνωστος οὗτος πρὸς τὸν ὁμόλογον αὐτοῦ 240 εἶναι εἰς εὐθὺν λόγον τῶν ἀριθμῶν τῶν ἵππων. Ὅθεν συνιςῶμεν τὴν ἀναλογίαν $3:5::240:\chi$ ἐξ ἧς προκύπτει $\chi=400$.

Λαμβάνοντες μετὰ ταῦτα ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν δευτέραν σχέσιν τοῦ ζητήματος παρατηροῦμεν ὡσαύτως, ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα αὕτη ποσότης 400 καὶ ἡ ζητουμένη εἶναι εἰς εὐθεῖαν σχέσιν τῶν ἀριθμῶν τῶν ἡμερῶν. Ὅθεν ὑποστρώνομεν τὴν δευτέραν ἀναλογίαν $4:7::400:\chi'$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\chi'=700$.

Ἀλλὰ καὶ χωρὶς νὰ εὕρωμεν τὸν τέταρτον ὅρον χ τῆς πρώτης ἀναλογίας, ἐπιτέμνομεν τοὺς ὑπολογισμοὺς κατὰ γνωστὴν ἀρχὴν τῶν ἀναλογιῶν (ἀριθ. 273). Οὕτως ὑποστρώνοντες κατὰ πρῶτον τὴν ἀναλογίαν $3:5::240:\chi.$
ὑποστρώνομεν ἀμέσως καὶ τὴν δευτέραν $4:7::\chi:\chi'$

Πολυπλασιάζοντες δὲ αὐτὰς ὅρον ἐφ᾽ ὅρον καὶ ἐπαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα χ ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου λόγου συνάγομεν

$$3\times4 : 5\times7 : : 240 : \chi'.$$

ἐξ ἧς προκύπτει $$\chi' = \frac{5\times7\times240}{3\times4} = 700.$$

Συμφέρει νὰ παριστάνωμεν συμβολικῶς τοὺς πολυπλασιασμοὺς τῶν παραγόντων. Διότι διὰ τῆς ἐπαλείψεως τῶν κοινῶν εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἀποφεύγομεν πολλὰς περιττὰς πράξεις πολυπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

Β΄. Ὑποθέτοντες ὡσαύτως τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀγνώστου ἐξαρτώμενον ἐκ μόνης τῆς εὐθείας σχέσεως τῶν ποσοτήτων τοῦ νήματος ὑποστρώνομεν τὴν εὐθεῖαν ἀναλογίαν $12 : 20 : : 27 : \chi.$ (1)

Λαμβάνοντες δὲ μετὰ ταῦτα καὶ τὸν λόγον τοῦ πλάτους, ὅστις εἶναι ἀντίστροφος πρὸς τὸν τοῦ μήκους, ὑποστρώνομεν καὶ τὴν δευτέραν ἀναλογίαν $5 : 3 : : \chi : \chi'.$ (2)
πολυπλασιάζοντες δὲ αὐτὰς ὅρον ἐφ᾽ ὅρον καὶ ἐπαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα χ συνάγομεν

$$12\times5 : 20\times3 : : 27 : \chi', \text{ ἐξ ἧς } \chi' = \frac{20\times3\times27}{12\times5} = 27.$$

Γ΄. Ἀμφότεραι αἱ σχέσεις τοῦ ζητήματος τούτου εἶναι εὐθεῖαι· ὅθεν ὑποστρώνομεν τὰς ἀναλογίας.

πρῶτον ὡς πρὸς τὰ κομμάτια $11 : 12 : : 243,5 : \chi$
καὶ δεύτερον ὡς πρὸς τὰ μήκη $3,5 : 2,4 : : \chi : \chi'$
καὶ δι᾽ ἀναγωγῆς $110 : 12 : : 2435 : \chi$
καὶ . . . . . . $35 : 24 : : \chi : \chi'$
καὶ πολυπλασιάζοντες ἔχομεν $110\times35 : 12\times24 : : 2435 : \chi'.$

ὅθεν $$\chi' = \frac{12\times24\times2435}{110\times34} = 182,15. \text{ ὡς ἔγγιστα } 0,01.$$

288. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐπιλύομεν καὶ συνθετώτερα ἄλλα ὡς ἕπεται.

Ζήτημα Δ΄.—500 ἐργάται ἐργαζόμενοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν μετὰ 57 ἡμέρας ἔσκαψαν τάφρον 1800 πήχεων μήκους ἐπὶ 7 πήχεων πλάτους καὶ 3 βάθους. Ζητεῖται εἰς πόσας ἡμέρας οἱ 860 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν θέλουσι σκάψει ἑτέραν τάφρον 2900 πήχεων μήκους ἐπὶ 12 πήχεων πλάτους καὶ 5 βάθους εἰς γῆν τρὶς σκληροτέραν τῆς πρώτης.

Ὑποστρώνομεν κατὰ πρῶτον τὸν πίνακα τῶν ὑπολογισμῶν καὶ μετὰ ταῦτα ἐκθέτομεν τὴν ἑρμηνείαν.

$$\begin{array}{rcrcl} 860 & : & 500 & :: & 57 : \chi. \quad (1) \\ 10 & : & 12 & :: & \chi : \chi'. \quad (2) \\ 1800 & : & 2900 & :: & \chi' : \chi'' \quad (3) \\ 7 & : & 12 & :: & \chi'' : \chi''' \quad (4) \\ 3 & : & 5 & :: & \chi''' : \chi^{\text{IV}} \quad (5) \\ 1 & : & 3 & :: & \chi^{\text{IV}} : \text{X}. \quad (6) \end{array}$$

ἐξ ὧν ἕπεται·

$$860 \times 10 \times 1800 \times 7 \times 3 : 500 \times 12 \times 2900 \times 12 \times 5 \times 3 :: 57 : \chi. (7)$$

ὅθεν $\chi = \dfrac{500 \times 12 \times 2900 \times 12 \times 5 \times 3 \times 57}{860 \times 10 \times 1800 \times 7 \times 3} = 549\frac{51}{301}.$

Ἀνάλυσις. — Διακρίνομεν εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος κύρια μέρη δύο, τὸ μέν, περιλαμβάνον τοὺς ἀριθμοὺς

500 ἐργ. 12 ὥρ. 57 ἡμ. 1800 μήκ. 7 πλάτ. 3 βάθ. 1 σκλ. τὸ δὲ ἐκ τῶν ὁμολόγων 860 ἐργ. 10 ὥρ. χ ἡμ. 2900 μήκ. 12 πλάτ. 5 βάθ. 3 σκλ. (διὰ τοῦ λόγου 1 : 3 προσδιορίσαμεν τὴν σκληρότητα τῆς γῆς κατὰ τὴν συνθήκην τοῦ ζητήματος).

Τούτου τεθέντος, παραδεχόμενοι κατὰ πρῶτον, ὅτι καὶ οἱ δεύτεροι ἐργάται, ἐργαζόμενοι ἴσας ὥρας πρέπει νὰ τελειώσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον, συγκροτοῦμεν τὴν ἀντίστροφον ἀναλογίαν (1) τῶν ἐργατῶν πρὸς τὰς ἡμέρας. Μεταβαίνοντες εἰς τὸν δεύτερον λόγον τῶν ὡρῶν 12 καὶ 10 παρατηροῦμεν ὡσαύτως, ὅτι ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ὡσαύτως ἀντίστροφος πρὸς τὸν τῶν ἡμερῶν· ὅθεν συνιστῶμεν τὴν ἀντίστροφον ἀναλογίαν (2).

Προχωροῦντες εἰς τὸν τρίτον λόγον τοῦ μήκους, ἀναγνωρίζομεν ἀμέσως, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τῶν μηκῶν εἶναι εἰς εὐθεῖαν σχέσιν πρὸς τοὺς τῶν ἡμερῶν· ὅθεν ὑποστρώνομεν τὴν εὐθεῖαν ἀναλογίαν (3).

Ὁμοίως συλλογιζόμενοι καὶ διὰ τὰς δύο σχέσεις τοῦ πλάτους καὶ βάθους ὑποστρώνομεν καὶ τὰς ἀναλογίας (4) καὶ (5).

Τέλος ὡς πρὸς τὴν διάφορον ποιότητα τῆς γῆς παριςάνοντες τὴν σκληρότητα τῆς δευτέρας διὰ τοῦ 3, τὴν δὲ τῆς πρώτης διὰ τοῦ 1, ὑποςρώνομεν καὶ τὴν εὐθεῖαν ἀναλογίαν (5)· ἐπειδὴ ὁ μεγαλήτερος ὅρος τῆς σκληρότητος ἀναφέρεται εἰς μεγαλήτερον ἀριθμὸν ἡμερῶν καὶ ἐπομένως ἡ σχέσις εἶναι εὐθεῖα.

Πολυπλασιάζοντες ἤδη τὰς ἀναλογίας ταύτας ὅρον ἐφ' ὅρον καὶ ἐπαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας $\chi, \chi', \chi'', \chi''', \chi^{\text{IV}}$ ἀπὸ τὸν τρίτον καὶ τέταρτον ὅρον συνάγομεν τὴν σύνθετον (7), ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\chi = 549$ ἡμ. $\frac{51}{301}$.

289. Προτείνομεν χάριν ἀσκήσεως καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

Πρόβλημα Έ. — 15 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν μετὰ 18 ἡμέρας ἐτελείωσαν 450 πήχεις ἔργου· Ζητεῖται πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν τελειώνουσι 480 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ἔργου εἰς 8 ἡμέρας;

Ἀπόκρ. $\chi=30$ ἐργάται.

Ζήτημα ϛ'. — 1200 πήχεις ὑφάσματος ἀπὸ πλάτος $\frac{5}{4}$ τοῦ πήχεως ἤρκεσαν ἵνα ἐνδυθῶσι 500 στρατιῶται· Ζητεῖται πόσοι πήχεις ὑφάσματος ἀπὸ $\frac{7}{8}$ πλάτους, ἀπαιτοῦνται διὰ 960 στρατιώτας;

Ἀπόκρ. $\chi=3291\ \frac{3}{7}$ πήχεις.

Ζήτημα Ζ'.—Ταχυδρόμος, περιπατῶν 15 ὥρας τὴν ἡμέραν, μετὰ 20 ἡμέρας διήνυσε 375 στάδια· Ζητεῖται πόσας ὥρας πρέπει νὰ περιπατῇ τὴν ἡμέραν, ὅπως εἰς 18 ἡμέρας διανύσῃ 400 στάδια;

Ἀπόκρ. $\chi=17\ \frac{7}{9}$ ὥρας.

Ζήτημα Ή.—Ἂν εἰς 7 ἡμέρας οἱ 12 ἵπποι ἔφαγον 350 μνᾶς χόρτου, ζητεῖται διὰ πόσας ἡμέρας ἐξαρκοῦσιν αἱ 1000 μναῖ εἰς 15 ἵππους;

Ἀπόκρ. ἡμέρας 16.

Ζήτημα Θ'. — Ἐκ δύο ταπήτων, τοῦ μὲν 7 πήχεων μήκους ἐπὶ 5 πλάτους, τιμωμένου δραχ. 420, τοῦ δὲ $6\ \frac{3}{4}$ πήχεων μήκους ἐπὶ $4\ \frac{1}{2}$ πλάτους τιμωμένου πρὸς δραχ. 350, ποῖος εἶναι ὁ συμφερώτερος εἰς τὴν τιμὴν, καὶ κατὰ πόσον;

Ἀπόκρ. ὁ δεύτερος τιμᾶται δρ. 14, 50 κάτω τῆς ἀναλόγου ἀξίας.

Ζήτημα Ι'. — Ὁδοιπόρος ἔμελλε νὰ διανύσῃ ὡρισμένην ὁδὸν διὰ 5 ἡμέρας περιπατῶν 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἀλλ' ἐμποδισθεὶς μίαν ἡμέραν, ζητεῖ εἰς τὰς 4 μόνον νὰ διανύσῃ τὸ αὐτὸ διάστημα ἐπισπεύδων τὸ βῆμα κατὰ $\frac{1}{5}$· Ζητεῖται πόσας ὥρας πρέπει νὰ ὁδοιπορῇ τὴν ἡμέραν;

Ἀπόκρ. ὥρας $8\ \frac{1}{3}$.

§. ζ'. Περὶ τῆς μεθόδου τοῦ τόκου.

290. Ἡ μέθοδος αὕτη κυρίως μὲν εἶναι αὐτὴ ἡ μέθοδος τῶν τριῶν, περιλαμβάνουσα μόνον τὰ ζητήματα τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὸν τόκον. Γίνεται δὲ περὶ ταύτης ἰδιαίτερος λόγος, καὶ διότι τὰ ζητήματα ταῦτα ἀπαντῶνται συχνώτατα, καὶ διότι ἐκ τῆς γενικῆς ἀναλύσεως πορίζόμεθα τύπους τελικοὺς, ἡ ἑρμηνεία τῶν ὁποίων χορηγεῖ γενικοὺς κανόνας τῆς ἐπιλύσεως τῶν ζητημάτων τούτων καὶ χωρὶς τῆς ὑποστρώσεως τῶν ἀναλογιῶν.

Τὰ ζητήματα τοῦ τόκου εἶναι τὰ ἑξῆς τέσσαρα.

Ά. Νὰ προσδιωρίσωμεν τὸν τόκον τινὸς κεφαλαίου δανειζομένου εἰς ὡρισμένον χρόνον πρὸς γνωστόν τι ἐπιτόκιον, ὁριζόμενον ἐπὶ τοῖς 100 κατ᾽ ἔτος ἢ κατὰ μῆνα.

Β΄. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον τοκιζόμενον πρὸς γνωστόν τι ἐπιτόκιον μετὰ δεδομένον χρόνον ἀποφέρει ὡρισμένον τόκον.

Γ΄. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸν χρόνον, μεθ᾽ ὃν κεφάλαιόν τι πρὸς γνωστὸν ἐπιτόκιον ἀποφέρει ὡρισμένον τόκον.

Δ΄. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἐπιτόκιον, καθ᾽ ὃ ἀναφέρεται γνωστὸς τόκος δεδομένου κεφαλαίου, δανεισθέντος εἰς ὡρισμένον χρόνον.

Ἐπιχειροῦμεν τὴν λύσιν αὐτῶν διαδοχικῶς ὡς ἕπεται.

291. Διὰ τὸ πρῶτον ἔστω κεφάλαιον, 4500 δραχ. τοκιζόμενον πρὸς ἐπιτόκιον 7 τοῖς $^0/_0$. Ζητεῖται ὁ τόκος αὐτοῦ μετὰ 2 ἔτη καὶ 7 μῆνας. Εἰς τὴν ἐκφώνησιν ταύτην ἀνευρίσκομεν ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς διπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν· τουτέστιν, ἂν 100 δραχμαὶ ἀποφέρουσιν 7 μετὰ ἓν ἔτος, πόσον ἀναλόγως ἀποφέρουσιν αἱ 4500 μετὰ 2 ἔτη καὶ 7 μῆνας; Ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὰς σχέσεις τοῦ ζητήματος εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν λέγομεν· Ἐπειδὴ οἱ τόκοι εἶναι ἐπ᾽ εὐθείας ἀνάλογοι πρὸς τὰ κεφάλαια, καλοῦντες τὸν ἄγνωστον τόκον Τ, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $100 : 4500 :: 7 : Τ$. (1) καὶ πάλιν ἐπειδὴ οἱ χρόνοι εἶναι ἐπ᾽ εὐθείας ἀνάλογοι πρὸς τοὺς τόκους, ἔχομεν ὡσαύτως τὴν ἀναλογίαν

$$1 : 2 \text{ ἔτη } 7 \text{ μῆνας} :: Τ : Τ'. \quad (2)$$

καὶ πολυπλασιάζοντες λαμβάνομεν $100 : 4500\times 2\tfrac{7}{12} :: 7 : Τ'$

ἐξ ἧς προκύπτει $$Τ' = \frac{4500\times 2\frac{7}{12}\times 7}{100} = 315\times 2\tfrac{7}{12} = 813{,}75.$$

Ἵνα ἐπιλύσωμεν τὸ αὐτὸ πρόβλημα γενικῶς, παριστάνομεν τὸ μὲν κεφάλαιον α, τὸν δὲ χρόνον κ, τὸ ἐπιτόκιον ε καὶ τὸν τόκον Τ.

Συλλογιζόμενοι, ὡς ἀνωτέρω, συνάγομεν τὰς ἀναλογίας.

$$100 : α :: ε : Τ$$

καὶ $$1 : κ :: Τ : Τ'$$

Ἐκ τούτων λαμβάνομεν $$100 : ακ :: ε : Τ'$$

καὶ ἑπομένως $$Τ' = \frac{ακε}{100}.$$

Ὁ τελικὸς οὗτος τύπος ἐξηγεῖ ὑπὸ γενικὴν καὶ εὐερμήνευτον μορφὴν τὸν τρόπον τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ τόκου παντὸς κεφαλαίου δι᾽ ὁσονδήποτε χρόνον πρὸς οἱονδήποτε ἐπιτόκιον· τουτέστιν, ἵνα εὕρωμεν τὸν τόκον τινὸς κεφαλαίου κτλ, πολυπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον, τὸ δὲ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100.

Ἐκ τούτου γίνεται φανερὰ ἡ ὠφέλεια τῆς εἰδικῆς ἀναλύσεως τοῦ ζητήματος τοῦ τόκου, ὡς εἴπομεν (ἀριθ. 290).

292. Ἐκ τοῦ εὑρεθέντος τύπου $T = \frac{\alpha\kappa\varepsilon}{100}$ μανθάνομεν ἀμέσως, ὅτι δίδεται τόκος ἴσος μὲ τὸ κεφάλαιον, ἢ ὅτι διπλασιάζεται τὸ κεφάλαιον, ὁσάκις τὸ γινόμενον κ ε τοῦ χρόνου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου εἶναι 100· τοιαύτη δὲ περίστασις συμβιβάζεται, ὅταν

$$\kappa = 20 \quad \varepsilon = 5$$
$$\kappa = 10 \quad \varepsilon = 10$$
$$\kappa = 5 \quad \varepsilon = 20$$
$$\kappa = 2\tfrac{1}{2} \quad \varepsilon = 40$$

τουτέστι μετὰ 20 ἔτη πρὸς 5 τοῖς %.
ἢ μετὰ 10 ἔτη πρὸς 10 τοῖς %.
ἢ μετὰ 5 ἔτη πρὸς 20 τοῖς %.
ἢ μετὰ $2\frac{1}{2}$ ἔτη πρὸς 40 τοῖς %.

Φέρομεν ἤδη χάριν ἐφαρμογῆς καὶ ἕτερον παράδειγμα.

Ζητεῖται ὁ τόκος 5000 δραχμῶν διὰ $10\frac{1}{2}$ μῆνας πρὸς $\frac{3}{4}$ τοῖς % κατὰ μῆνα.

Ἐνταῦθα ἔχομεν $\alpha = 5000$, $\varepsilon = \frac{3}{4}$ καὶ $\kappa = 10\frac{1}{2}$.

Ὅθεν ὁ τύπος $T = \frac{\alpha\kappa\varepsilon}{100}$ ἄγεται εἰς $T = \frac{5000 \times \frac{3}{4} \times 10\frac{1}{2}}{100}$ καὶ ἐκτελοῦντες τὸν ὑπολογισμὸν εὑρίσκομεν $T = 393, 75$.

293. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠδυνάμεθα μὲν νὰ ἐπιλύσωμεν ἀναλυτικῶς καὶ τὰ ἄλλα τρία ζητήματα. Ἀλλ' εὑρεθέντος ἤδη τοῦ τύπου $T = \frac{\alpha\kappa\varepsilon}{100}$ δυνάμεθα ἐξ αὐτοῦ τούτου νὰ συνάξωμεν καὶ τὴν γενικὴν λύσιν τῶν ἄλλων.

Τῷ ὄντι ἐκ τῶν τεσσάρων ποσοτήτων Τ, α, κ, ε, τῶν ἐμπεριεχομένων εἰς τὸν εὑρεθέντα τύπον, μία τούτων εἶναι ἡ ἄγνωστος· αἱ δὲ ἄλλαι γνωσταί, καὶ εἰς μὲν τὸ πρῶτον ζήτημα ἄγνωστος εἶναι ἡ Τ, εἰς δὲ τὰ ἄλλα εἶναι διαδοχικῶς ἢ τὸ α, ἢ τὸ κ, ἢ τὸ ε.

Ἐπιχειροῦμεν τὴν λύσιν τοῦ δευτέρου ζητήματος, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἄγνωστον τὸ κεφάλαιον α.

Πολυπλασιάζοντες ἐπὶ 100 ἑκάτερον μέλος τοῦ τύπου $T = \frac{\alpha\kappa\varepsilon}{100}$ ἔχομεν $100\ T = \alpha\kappa\varepsilon$.

καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ γνωστοῦ γινομένου κε.

προσδιορίζομεν $α = \dfrac{100\,T}{κε}$.

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου ἑρμηνεύεται ὁ κανὼν, ἵνα εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, ὅταν ἦναι γνωστὰ ὁ χρόνος, τὸ ἐπιτόκιον καὶ ὁ ὅλος τόκος, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἑκατονταπλάσιον τοῦ ὅλου τόκου διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τοῦ χρόνου.

Ἔστω π. χ. κεφάλαιον τοκισθὲν πρὸς 7 τοῖς $^0/_0$ κατ' ἔτος ἀπέφερεν τόκον δραχ. 755 μετὰ 2 ἔτη καὶ 6 μῆνας· πόσον ἦτον τὸ κεφάλαιον.

Ἐνταῦθα ἔχομεν $T=755$, $ε=7$, $κ=2\frac{1}{2}$,

ὅθεν $100\ T=75500$ καὶ $κ.\ ε=7\times 2\frac{1}{2}=\frac{35}{2}$.

ἑπομένως $α = \dfrac{100\,T}{κε} = \dfrac{75500}{\frac{35}{2}} = \dfrac{151000}{35} = 4314,\ 28$.

Καὶ τῷ ὄντι ἀναζητοῦντες τὸν τόκον τῶν 4314, 28 κατὰ τὸν προηγούμενον τόκον προσδιορίζομεν τόκον δραχ. 755.

Ὁ τύπος οὗτος $α = \dfrac{100\,T}{κε}$ δύναται νὰ ὀνομασθῇ τύπος τῆς διατιμήσεως.

Διότι δι' αὐτοῦ προσδιορίζομεν ἀκριβῶς τὴν ἀξίαν κτήματος ἀναλόγως τῆς ἐπικαρπίας αὐτοῦ εἰς ὡρισμένον χρόνον. Ἐφεξῆς ὑποσυνάπτομεν τοιαῦτα παραδείγματα.

294. Μεταβαίνομεν εἰς τὸ τρίτον ζήτημα. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸν χρόνον κ, μεθ' ὃν κεφάλαιόν τι α πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον ε ἀποφέρει γνωστὸν τόκον Τ.

Πολυπλασιάζοντες ὡσαύτως ἐπὶ 100 ἑκάτερον μέλος τοῦ τύπου $T=\dfrac{ακε}{100}$ ἔχομεν $100\ T=ακε$, καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ γινομένου αε εὑρίσκομεν $κ=\dfrac{100\,T}{αε}$.

Ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγεται ὁ κανών. Ἵνα εὕρωμεν τὸν χρόνον, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἑκατονταπλάσιον τοῦ ὅλου τόκου διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου.

Ἐφαρμογή.— Ἔστω κεφάλαιον $α=5800$, ἐπιτόκιον $ε=8$ καὶ ὅλος τόκος $T=1000$.

Ἐκ τούτου ἔχομεν $κ=\dfrac{100\,T}{αε}=\dfrac{100000}{5800\times 8}=\frac{100000}{46400}=\frac{1000}{464}=2$ ἔτη 1 μῆνα 25 ἡμ. ἢ 26.

295. Ἐπιλύομεν τέλος καὶ τὸ τέταρτον ζήτημα. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἐπιτόκιον, ὅταν ὁ τόκος, ὁ χρόνος καὶ τὸ κεφάλαιον ἦναι γνωστά.

Ἐκ τοῦ τύπου $T=\dfrac{\alpha\kappa\varepsilon}{100}$.

συνάγομεν ὁμοίως $100\ T=\alpha\kappa\varepsilon$.

καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ γνωστοῦ γινομένου ακ λαμβάνομεν

$$\varepsilon=\frac{100\ T}{\alpha\kappa}.$$

Ὅθεν ἔχομεν τὸν κανόνα. Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολυπλασιάζομεν τὸν ὅλον τόκον ἐπὶ 100, τὸ δὲ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου.

Ἐφαρμογή. — Ἔστω κεφάλαιον $\alpha=5000$, χρόνος $\kappa=2$ ἔτη καὶ ὅλος τόκος $T=800$.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν $\varepsilon=\dfrac{800\times100}{5000\times2}=8$.

296. Χάριν ἀσκήσεως προτείνομεν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

Πρόβλημα Α΄. — Νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον τὸ ὁποῖον μετὰ 27 μῆνας πρὸς $\frac{1}{2}$ τοῖς $^0/_0$ κατὰ μῆνα ἀπέφερε τόκον δραχ. 1317, 65.

Ἐκ τοῦ τύπου $\alpha=\dfrac{100\ T}{\kappa\varepsilon}$ εὑρίσκομεν $\alpha=9760,\ 37$.

Πρόβλημα Β΄. — Ἀμπελὼν κατὰ μέσον ὅρον ἐπικαρπίας δίδει κέρδος 650 δραχ. κατ᾽ἔτος· Ζητεῖται πόσον ἐκτιμᾶται, ὥστε νὰ ἀναφέρεται ἐπιτόκιον 8 τοῖς $^0/_0$.

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου εὑρίσκομεν $\alpha=\dfrac{65000}{8}=8125$.

Πρόβλημα Γ΄.— Κεφάλαιον ἐκ δραχ. 2800 τοκίζεται πρὸς 8 τοῖς $^0/_0$. Ζητεῖται μετὰ πόσα ἔτη θέλει δώσει τόκον δραχ. 500.

Ἐκ τοῦ τύπου $\kappa=\dfrac{100\ T}{\alpha\varepsilon}$ εὑρίσκομεν $\kappa=\frac{500}{224}=2$ ἔτη 2 μῆνας 23 ἡμέρας.

Πρόβλημα Δ΄.—Μετὰ πόσον χρόνον διπλασιάζεται τὸ κεφάλαιον πρὸς $\frac{3}{4}$ τοῖς $^0/_0$ κατὰ μῆνα;

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου λαμβάνομεν κ= 11 ἔτη, 1 μῆνα, 10 ἡμέρας.

Πρόβλημα Ε.—Ἔμπορος ἠγόρασεν ἔλαιον 8500 δραχ., τὸ ὁποῖον πωλήσας μετὰ 15 μῆνας ὠφελήθη 1800 δραχ. Πόσον ἀναλογεῖ τοῖς $^0/_0$ κατ᾽ἔτος;

Ἐκ τοῦ τύπου $ε=\frac{100\,Τ}{ακ}$ εὑρίσκομεν ε=16,94 . . .

Πρόβλημα ς'.—Γλεῦκος πωλεῖται δραχ. 6,65 τὸ βαρέλιον, μετὰ δύο ἔτη πωλεῖται ὡς παλαιὸς οἶνος δραχ. 10, 50· ζητεῖται πόσον ἀναλογεῖ ἐπιτόκιον;

Ἐπειδὴ Τ=10, 50—6, 65=3, 85· ἄρα ε=28, 94.

Πρόβλημα Ζ'. —Ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ φλωρινίου εἶναι δρ. 2, 89. Ἵνα ἐμβάσῃ δέ τις φλωρίνια εἰς Τεργέστην, ἀγοράζει συναλλαγματικὴν, πληρωτέαν μετὰ δύο μῆνας ἀπὸ τῆς ἐκδόσεως, εἰς φλωρίνια πρὸς δραχ. 2, 83· Πόσον ἀναλογεῖ τὸ κέρδος ἐν εἴδει ἐπιτοκίου τοῖς $^0/_0$ κατὰ μῆνα;

Ἐπειδὴ Τ=2, 89—2, 83=0, 06 καὶ α=2, 83, καὶ κ=2· ἄρα ε=1, 06.

Πρόβλημα Η'.—Πάγιον Τραπεζικὸν γραμμάτιον, ἤτοι τῶν 75 φράγκων, φέρον τόκον 3 φράγκα κατ' ἔτος, πωλεῖται εἰς τὸ χρηματιστήριον φράγκα 84· Πόσον ἀναλογεῖ τὸ ἐπιτόκιον κατ' ἔτος καὶ κατὰ μῆνα;

Ἐκ τοῦ τύπου $ε=\frac{100\,τ}{ακ}$ εὑρίσκομεν ε = 3, 57 κατ' ἔτος καὶ 0, 29 κατὰ μῆνα.

Πρόβλημα Θ'.—Ἂν τὸ μὲν πάγιον γραμμάτιον τῶν 75, φέρον τόκον 3 φράγ., τιμᾶται φράγκ. 82, τὸ δὲ τῶν 100, ἀποφέρον τόκον 5, τιμᾶται φράγ. 114 ποῖον εἶναι τὸ ἐπικερδέστερον; καὶ κατὰ πόσον;

Ἐπιλύοντες κατὰ τὰ διδόμενα ταῦτα δὶς τὸ προηγούμενον εὑρίσκομεν ἐτήσιον ἐπιτόκιον διὰ μὲν τὸ πρῶτον 3, 65, διὰ δὲ τὸ δεύτερον 4, 38· ὅθεν ἐπικερδέστερον τὸ δεύτερον κατὰ τὴν ὑπεροχὴν 0, 73.

Πρόβλημα Ι'.—Ἔμπορος ἠγόρασε 2500 κοιλὰ σίτου πρὸς δραχ. 5, 50, ἐκ τῶν ὁποίων τῷ ἐκλάπησαν τὰ 300· μετὰ 8 δὲ μῆνας ἐπώλησε τὰ ὑπόλοιπα πρὸς δραχ. 7, 75· Πόσον ὠφελήθη τοῖς 100 κατ' ἔτος;

Ἐπλήρωσε δραχ. 13750, εἰσέπραξε μετὰ 8 μῆνας δραχ. 17050, ὠφελήθη τὴν διαφορὰν 3300.

Ὅθεν α=13750, $κ=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$, τ=3300.

Ἐκ τούτου Ε=36 τοῖς $^0/_0$ κατ' ἔτος.

Πρόβλημα ΙΑ'. — Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀξίας δραχμῶν 3859, 25· μέλλων δὲ νὰ πληρώσῃ τὸ ἀντίτιμον τοῦτο μετὰ 18 μῆνας, ὑπογράφει γραμμάτιον, ἐμπεριλαμβάνον καὶ τὸν τόκον αὐτοῦ πρὸς $\frac{3}{4}$ τοῖς $^0/_0$ κατὰ μῆνα. Ζητεῖται ποῖον ποσὸν πρέπει νὰ φέρῃ τὸ γραμμάτιον;

Ἀπόκρ. 4380, 24.

§. ή. Περὶ τῆς μεθόδου τῆς ὑφαιρέσεως.

297. Λέγεται ὕφεσις τὸ ἐκπιπτόμενον ποσὸν ἀπὸ τὴν ἀξίαν τινὸς γραμματίου, ἐξαργυρουμένου πρὸ τῆς ὁριζομένης προθεσμίας. Ἡ εὕρεσις τῆς ἀναλόγου ὑφέσεως πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου καὶ πρὸς τὸν ἀναφερόμενον χρόνον εἶναι ὁ σκοπὸς τῆς παρούσης μεθόδου.

Μολονότι τὰ ζητήματα ταῦτα ὑπάγονται εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν, γίνεται ὅμως ἰδιαίτερος λόγος· διότι ἡ γενικὴ λύσις αὐτῶν χορηγεῖ τύπους, ἡ ἑρμηνεία τῶν ὁποίων γίνεται κανὼν διὰ τὴν γενικὴν λύσιν αὐτῶν καὶ χωρὶς τῆς ὑποστρώσεως τῶν ἀναλογιῶν· Ἐξηγούμεθα σαφέστερον διὰ παραδειγμάτων.

Πρόβλημα Α'. — Γραμμάτιον 3000 δραχμῶν πληρωτέων μετὰ ἓν ἔτος ἐξαργυροῦται σήμερον ἐπὶ ὑφέσει 6 $^0/_0$ κατ' ἔτος Ζητεῖται τὸ ποσὸν τῆς προώρου ἐξαργυρώσεως.

Ἀνάλυσις.—Φανερὸν ἀμέσως, ὅτι ὁ ἔμπορος πρέπει νὰ λάβῃ τόσον ποσὸν ἀπέναντι τοῦ γραμματίου, ὅσον ἑνούμενον μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ πρὸς 6 $^0/_0$ δι' ἓν ἔτος νὰ παράγῃ δραχ. 3000. Ὅθεν ἐπειδὴ αἱ 100 δραχμαὶ ἀποφέρουσι τόκον 6, ἢ μᾶλλον ἐπειδὴ αἱ 106 δραχμαὶ πληρωτέαι μετὰ ἓν ἔτος δύνανται πρὸ αὐτοῦ μόνον 100, ἄρα ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $106 : 100 : : 3000 : \chi$

ἐξ ἧς προκύπτει ἡ ἐξαργύρωσις $\chi = \frac{300000}{106} = 2830,\ 19.$

Πρὸς τούτοις, ἐπειδὴ ὁ τραπεζίτης ἐκπίπτει 6 εἰς 106 ἄρα ἔχομεν καὶ ἑτέραν ἀναλογίαν $106 : 6 : : 3000 = \chi'$,

ἐξ ἧς προκύπτει ἡ ὕφεσις $\chi' = 119,\ 81.$

Καὶ τῷ ὄντι τὰ δύο ἐξαγόμενα τὸ τῆς ἐξαργυρώσεως 2830,19 καὶ τὸ τῆς ὑφέσεως 169,81 συνιστῶσι τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου δραχ. 3000· ὥστε αἱ δύο αὗται πράξεις ἐπιβεβαιοῦνται ἀμοιβαίως.

Ἔστω ἐν γένει α τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου, κ ὁ χρόνος τῆς προθεσμίας καὶ ε τὸ ἐπιτόκιον, καθ' ὃ ὑπολογίζεται ἡ ἄγνωστος ὕφεσις χ.

Ἐπειδὴ 100 δραχμαὶ ἀποφέρουσι τόκον ε εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, τὸ ἔτος ἢ τὸν μῆνα· ἄρα διὰ χρόνον κ ἀποφέρουσι τόκον κε. Ἐκ τούτου αἱ 100+κε ἐμπροθέσμιοι δραχμαὶ δύνανται σήμερον μόνον 100. Γνωσθείσης οὕτω τῆς σχέσεως, ὑποστρώνομεν τὴν ἀναλογίαν τῆς προεξοφλήσεως.

$$100+\kappa\varepsilon : 100 : : \alpha : \chi \text{ ἐξ ἧς } \chi = \frac{100\,\alpha}{100+\kappa\varepsilon}. \quad (1)$$

Παρομοίως, ἐπειδὴ ἀνὰ δραχμ. 100+κε ὁ τραπεζίτης ἐκπίπτει δι' ἑαυτὸν κε· ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης ὑποστρώνομεν καὶ τὴν ἀναλογίαν τῆς ὑφέσεως.

$$100+\kappa\varepsilon : \kappa\varepsilon :: \alpha : \chi' \text{ ἐξ ἧς } \chi' = \frac{\alpha\kappa\varepsilon}{100+\kappa\varepsilon}. \quad (2)$$

ἑρμηνεύοντες τοὺς γενικοὺς τούτους τύπους συγκροτοῦμεν τοὺς ἑξῆς κανόνας, οἱ ὁποῖοι χαρακτηρίζουσιν, ὡς εἴπομεν, τὴν μέθοδον τῆς ὑφαιρέσες.

Α΄. Ἵνα εὕρωμεν τὴν προεξόφλησιν, πολυπλασιάζομεν τὸ ποσὸν ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100 ἐπηυξημένου κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τοῦ χρόνου.

Β΄. Ἵνα εὕρωμεν τὴν ὕφεσιν, πολυπλασιάζομεν τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον, τὸ δὲ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100 ἐπηυξημένου κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ χρόνου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου.

298. Οἱ τύποι (1) καὶ (2) ἐπικυροῦνται ἀμοιβαίως. Διότι ὡς καὶ εἰς τὸ μερικὸν παράδειγμα, ὡσαύτως καὶ ἐνταῦθα ἀθροιζόμενα τὰ συμβολικὰ ἐξαγόμενα δίδουσιν ἄθροισμα τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου α.

Τῷ ὄντι προσθέτοντες μέλος πρὸς μέλος ἔχομεν

$$\chi+\chi' = \frac{100\,\alpha}{100+\kappa\varepsilon} + \frac{\alpha\kappa\varepsilon}{100+\kappa\varepsilon} \ldots.$$

Ὄντος δὲ κοινοῦ τοῦ παρονομαστοῦ, προσθέτοντες τοὺς ἀριθμητὰς λαμβάνομεν $\chi+\chi' = \frac{100\,\alpha+\alpha\kappa\varepsilon}{100+\kappa\varepsilon}.$

Καὶ ἀποκλείοντες τὸν κοινὸν παράγοντα α τῶν ὅρων τοῦ ἀριθμητοῦ λαμβάνομεν τέλος $\chi+\chi' = \frac{\alpha(100+\kappa\varepsilon)}{100+\kappa\varepsilon} = \alpha.$

299. Χάριν ἐφαρμογῆς φέρομεν καὶ ἕτερον παράδειγμα τὸ ἑξῆς:

Πρόβλημα Β΄. — Ζητεῖται ἡ παροῦσα τιμὴ τοῦ γραμματίου ἐκ δραχ. 4850, πληρωτέων μετὰ 13 $\frac{1}{2}$ μῆνας ἐπὶ ὑφέσει $\frac{3}{4}$ τοῖς $0/^0$ κατὰ μῆνα,

Κατὰ τὰ διδόμενα ἔχομεν $\alpha=4850$, $\kappa=13\ \frac{1}{2}$ καὶ $\varepsilon=\frac{3}{4}$.

Ὅθεν $\kappa\varepsilon=\frac{3}{4}\times 13\ \frac{1}{2} = \frac{81}{8} = 10,125$.

Ἐπομένως ἔχομεν·

$$\chi = \frac{100\,\alpha}{100+\kappa\varepsilon} = \frac{485000}{110,125} = 4404,09.$$

$$\chi' = \frac{\alpha\kappa\varepsilon}{100+\kappa\varepsilon} = \frac{4850\times 10,125}{110,125} = 445,91.$$

Καὶ τῷ ὄντι $\chi+\chi' = 4404,09+445,91 = 4850$.

300 Ἂν καὶ ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσις ἦναι ἡ μόνη σύμφωνος μὲ τὸ δίκαιον καὶ τὸν ὀρθὸν λόγον, δὲν εἶναι ὅμως παραδεκτὴ ὑπὸ τῶν ἐμπόρων. Ἀντ' αὐτῆς δὲ μεταχειρίζονται κοινῶς τὴν μέθοδον τοῦ τόκου, παραδεχόμενοι ὕφεσιν τινὰ ἐπὶ τοῖς 100 κατ' ἔτος ἢ κατὰ μῆνα.

Ἐπιλύομεν τὸ ἴδιον δεύτερον πρόβλημα καὶ διὰ τῆς δευτέρας ταύτης μεθόδου κατὰ τὴν ἀνάλυσιν.

Ἐπειδὴ ἐπὶ τῶν 100 δραχμῶν γίνεται ὕφεσις $\frac{3}{4}$ κατὰ μῆνα· ἄρα διὰ $13\frac{1}{2}$ μῆνας, πρέπει νὰ γενῇ $\frac{3}{4}\times13\frac{1}{2}=\frac{81}{8}=10,\ 125$.

Ἐπομένως, ἵνα λάβωμεν τὴν ἀνάλογον ὕφεσιν ἐπὶ τοῦ ὅλου ποσοῦ τῶν 4050, ὑποστρώνομεν τὴν ἀναλογίαν.

$100 : 10,\ 125 : : 4850 : \chi$. ἐξ ἧς $\chi=491{,}06$ μεῖον 0,01.

Εὑρεθείσης τῆς ὑφέσεως, προσδιορίζομεν τὴν προεξόφλησιν δι' ἀφαιρέσεως τοῦ ἐκπιπτομένου ποσοῦ ἀπὸ τοῦ ὅλου ποσοῦ τοῦ γραμματίου. Οὕτως εὑρίσκομεν διὰ τὴν προεξόφλησιν

$$4850-491,\ 06=4358,\ 94.$$

Συγκρίνοντες τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο 4358, 94 πρὸς τὸ πρότερον εὑρεθὲν 4404, 09 διὰ τῆς πρώτης μεθόδου διακρίνομεν διαφορὰν ἐκ δραχμ. 45, 15, τὰς ὁποίας διὰ τῆς δευτέρας μεθόδου λαμβάνει ὀλιγώτερον ὁ κύριος τοῦ γραμματίου. Ἰδοὺ πῶς ἐξηγεῖται ἡ διαφορὰ αὕτη. Ὁ τραπεζίτης ἐκπίπτων δραχμὰς 491, 96 ἀπὸ τοῦ ὅλου ποσοῦ τοῦ γραμματίου 4850, ὡς τόκον τοῦ ποσοῦ τούτου μετὰ μῆνας $13\frac{1}{2}$ πρὸς $\frac{3}{4}$ τοῖς 100 κατὰ μῆνα, ὑπολογίζει ὑπὲρ ἑαυτοῦ καὶ τὸν τόκον τῶν δραχμῶν, τὰς ὁποίας κρατεῖ ὁ ἴδιος, ἐνῷ κατὰ τὸ δίκαιον πρέπει νὰ ἐκπέσῃ τὸν τόκον μόνον τῶν χρημάτων τῆς προεξοφλήσεως, τὰ ὁποῖα λαμβάνει ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου, ὡς προέκυψε διὰ τῆς πρώτης μεθόδου.

Ἐκ τούτου τὸ ποσὸν δραχ. 491, 06 συντίθεται ἐκ δύο μερῶν ἐκ τοῦ τόκου 445, 91, τὸν ὁποῖον ἀποφέρει ἡ παροῦσα τιμὴ τοῦ γραμματίου καὶ ἐκ τοῦ τόκου τῶν 445, 91.

Τῷ ὄντι ὑποστρώνοντες τὴν ἀναλογίαν

$$100 : 10,\ 125 : : 445,91 : \chi=45,\ 15.$$

εὑρίσκομεν ὡς τέταρτον ὅρον τὴν περὶ ἧς ὁ λόγος διαφορὰν 45, 15. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς ὅλα τὰ ὅμοια ζητήματα.

301. Ἡ δευτέρα αὕτη μέθοδος, καί τοι ἐσφαλμένη, εἶναι ἐν τοσούτῳ ἐν χρήσει παρὰ πᾶσι τοῖς ἐμπόροις, καθὸ ἁπλουστέρα. Ἠδύνατο ἴσως νὰ συμβιβασθῇ, ὑπολογιζομένης τῆς ὑφέσεως μικροτέρας κατά τι ἀπὸ τὸ ἐπιτόκιον. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι δύσκολον, καὶ μόνη ἡ ἀμοιβαιότης δικαιολογεῖ τὸ λάθος.

Πρὸς διάκρισιν τῶν δύο μεθόδων ὀνομάζομεν τὴν μὲν πρώτην ἐσωτερικὴν, τὴν δὲ δευτέραν ἐξωτερικήν. Ἰδοὺ καὶ ἕτερα παραδείγματα.

Πρόβλημα Γ΄. —Ζητεῖται ἡ παροῦσα τιμὴ τοῦ γραμματίου ἐκ δραχμ. 2850, 45, πληρωτέων μετὰ 2 ἔτη καὶ 8 μῆνας, ἐπὶ ὑφέσει 8,75 % κατ' ἔτος.

Μέθοδος ἐσωτερική. — Ἐπειδὴ ἔχομεν $\alpha=2850,45$, $\kappa=2\frac{2}{3}$ καὶ $\varepsilon=8,75$ ἄρα $\kappa\varepsilon=8,75\times\frac{8}{3}=\frac{70}{3}$.

$$\text{ἐπομένως } \chi=\frac{100\,\alpha}{100+\kappa\varepsilon}=\frac{285045}{100+\frac{70}{3}}=\frac{855135}{370}.$$

$$\text{Ὁμοίως } \chi'=\frac{\alpha\kappa\varepsilon}{100+\kappa\varepsilon}=\frac{2850,45\times\frac{70}{3}}{100+\frac{70}{3}}=\frac{2850,45\times70}{370}.$$

Καὶ ἐκτελουμένων τῶν διαιρέσεων εὑρίσκομεν

$$\left.\begin{array}{l} \chi=\dfrac{855135}{370}=2311,18 \\[2ex] \chi'=\dfrac{199531,5}{370}=539,27 \end{array}\right\} 2850,45$$

οὕτως ἡ προεξόφλησις μετὰ τῆς ὑφέσεως ἀποτελεῖ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου 2850,45.

Μέθοδος ἐξωτερική. — Ὁ τύπος τῆς δευτέρας εἶναι $\chi=\frac{\alpha\kappa\varepsilon}{100}$.

$$\text{Ὅθεν } \chi=\frac{2850,45\times\frac{70}{3}}{100}=\frac{285,045\times7}{3}=95,015\times7=665,405.$$

Ἐπομένως ἡ παροῦσα τιμὴ τοῦ γραμματίου εἶναι 2850,45—665, 405=2185,35.

Συγκρίνοντες ἤδη τὰ ἐξαγόμενα τῶν δύο μεθόδων εὑρίσκομεν διαφορὰν 125, 83, προερχομένην, ὡς ἀνωτέρω, ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ τόκου τῶν 539, 27.

$$\begin{array}{r} 2311,18 \\ 2185,35 \\ \hline 125,83 \end{array}$$

$$\text{Τῷ ὄντι } \frac{539,27\times\frac{70}{3}}{100}=125,829.$$

Πρόβλημα Δ΄. — Τραπεζίτης προεξώφλησε γραμμάτιον ἐκ δραχμῶν 5600 πληρωτέων μετὰ 14 μῆνας διὰ δραχ. 5129,45. Ζητεῖται ἐπὶ τίνι τιμῇ ὑπελόγισε τὴν ὕφεσιν κατὰ μῆνα;

Μέθοδος ἐσωτερική. — Ἐπειδὴ 5129,45 εἶναι ἡ παροῦσα τιμὴ τῶν 5600, διὰ τῆς σχέσεως ταύτης ζητοῦμεν κατὰ πρῶτον εἰς πόσον ἀναβαίνουσιν αἱ 100 δραχ. μετὰ 14 μῆνας. Ὅθεν ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$5129,45 : 5600 :: 100 : χ. \text{ ἐξ ἧς } χ=109,1735.$$

Ἐπομένως 109, 1735—100 ἤτοι 9, 1735 εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 μετὰ 14 μῆνας. Καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ 14 λαμβάνομεν 0, 6552 διὰ διὰ τὸ ἐπιτόκιον κατὰ μῆνα.

Μέθοδος ἐξωτερική. — Ἀφαιροῦντες τὴν προεξόφλησιν 5120,45 ἀπὸ τοῦ 5600 λαμβάνομεν 470,55 διὰ ὕφεσιν τοῦ γραμματίου, λόγῳ τόκου τῶν δραχμῶν 5600· ἐκ τούτου ὑποστρώνομεν τὴν ἀναλογίαν.

$$5600 : 470,55 :: 100 : χ=8,40.$$

καὶ διαιροῦντες 8,40 διὰ 14 εὑρίσκομεν τὸ μηνιαῖον ἐπιτόκιον 0,60 μικρότερον τοῦ προευρεθέντος 0,6552.

302. Τὸ ἑξῆς παράδειγμα μετέχει ἔκ τε τῆς μεθόδου τοῦ τόκου καὶ τῆς μεθόδου τῆς ὑφαιρέσεως.

Πρόβλημα Ε΄. — Ἔμπορος ἔχει τρία γραμμάτια τὸ μὲν ἐκ δραχμῶν 850, πληρωτέων μετὰ 15 μῆνας τὸ δὲ ἐκ 1250 πληρωτέων μετὰ 24, καὶ τὸ τρίτον ἐκ 3800, πληρωτέων μετὰ 30, καὶ ἀνταλάσσει αὐτὰ μὲ γραμμάτιον πληρωτέον μετὰ 3 ἔτη. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ φέρῃ τὸ γραμμάτιον, ὥστε νὰ ἐμπεριλαμβάνεται καὶ ὁ τόκος. Ὑποτίθεται δὲ ἐπιτόκιον καὶ ὕφεσις 8 $^0/_0$ κατ᾽ ἔτος.

Ὑπολογίζοντες ἐσωτερικῶς τὴν παροῦσαν τιμὴν τῶν γραμματίων εὑρίσκομεν διὰ μὲν τὸ πρῶτον 772,72, διὰ δὲ τὸ δεύτερον 1077,55 καὶ διὰ τὸ τρίτον 3166,66. Εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 4916,93 προσθέτοντες τὸν τόκον 1180,07 πρὸς 8 $^0/_0$ διὰ 3 ἔτη εὑρίσκομεν διὰ τὸ ζητούμενον ποσὸν δραχμὰς 6097.

§. Θ΄. Περὶ τῆς μεθόδου τῆς Ἑταιρίας.

303. Ἡ μέθοδος τῆς ἑταιρίας ἀφορᾷ ἐν γένει τὴν διαίρεσιν δεδομένου ἀριθμοῦ εἰς μέρη ἀπ᾽ εὐθείας ἀνάλογα πρὸς δεδομένους ἀριθμούς· λαμβάνει δὲ εἰδικῶς τὸ ὄνομα μέθοδος τῆς ἑταιρίας, διὰ τὴν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον χρῆσιν αὐτῆς εἰς ζητήματα τῆς ἑταιρίας, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μερίσωμεν κέρδος ἢ ζημίαν εἰς τόσα μέρη, ὅσοι εἶναι οἱ συνεταῖροι, κατὰ λόγον τῶν καταβολῶν ἢ τῶν χρόνων.

Θεωροῦντες τὸ ζήτημα ὑπὸ τὴν γενικωτέραν ἔποψιν καλοῦμεν Α τὸν μεριστέον ἀριθμὸν, μ, ν, π τοὺς ὁμολόγους ὅρους τῶν μερῶν καὶ $χ, χ', χ''$ τὰ ἄγνωστα μέρη.

Ἐξ αὐτῆς τῆς φύσεως τοῦ ζητήματος ἔχομεν τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων. $μ : χ :: ν : χ' :: π : χ''$.

Καὶ δυνάμει τῆς ἀποδειχθείσης ἰδιότητος (ἀριθ. 272) ἀθροίζοντες τοὺς ἡγουμένους καὶ ὁμοίως τοὺς ἑπομένους καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ ἄθροισμα τῶν ἀγνώστων ἑπομένων διὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ Α συγκροτοῦμεν τὰς ἀναλογίας.

$$\mu+\nu+\pi : A : : \mu : \chi = \frac{A\mu}{\mu+\nu+\pi}$$

$$: : \nu : \chi' = \frac{\nu A}{\mu+\nu+\pi}\cdot$$

$$: \pi : : \chi'' = \frac{\pi A}{\mu+\nu+\pi}\cdot$$

ἐξ ὧν ἕπεται, ὅτι ἵνα εὕρωμεν τὰ ζητούμενα μέρη, πολυπλασιάζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν ἐφ' ἕκαστον τῶν ὁμολόγων, καὶ διαιροῦμεν ἓν ἕκαστον γινόμενον διὰ τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν ὁμολόγων.

304. Ἔστωσαν πρὸς ἐφαρμογὴν τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

Πρόβλημα Α΄. — Τρεῖς συνεταῖροι καταβαλόντες ὁ μὲν 15000, ὁ δὲ 22540, ὁ δὲ 25600 δραχμὰς ἐκέρδισαν μετὰ ἓν ἔτος 12000 δραχμάς. Ζητεῖται πόσον ἀνήκει εἰς ἕκαςον αὐτῶν ἀνωλόγως τῆς καταβολῆς ἑκάσου.

Κατὰ τὴν γενικὴν λύσιν πολυπλασιάζομεν τὸ ὅλον κέρδος ἐπὶ τὴν καταβολὴν καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν καταβολῶν. Οὕτως εὑρίσκομεν

$$\text{Α΄.}\quad \chi = \frac{12000\times15000}{63140} = 2850,\ 81\cdot$$

$$\text{Β΄.}\quad \chi' = \frac{12000\times22540}{63140} = 4283,\ 81.$$

$$\text{Γ΄.}\quad \chi'' = \frac{12000\times25600}{63140} = \frac{4865,\ 38}{12000.\ : :}\cdot$$

Εὑρόντες τὸ μέρος ἑκάστου προσθέτομεν, καὶ ἐὰν ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθή, πρέπει, ὡς καὶ εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο, νὰ εὕρωμεν ἄθροισμα τὸ μεριστέον ποσόν.

Πρόβλημα Β΄.—Ἀνέλαβέ τις ἐπιχείρησιν, διὰ τὴν ὁποίαν κατέθεσεν 25 χιλιάδας δραχμὰς, μετὰ μῆνας δὲ πέντε προσέλαβε συνεταῖρον, ὅστις κατέθεσε δραχ. 40000, καὶ μετὰ ἓξ μῆνας μετὰ τὸν δεύτερον προσέλαβε καὶ τρίτον, ὅστις κατέθεσεν 60000· μετὰ δύο ἔτη ὑποστρώνοντες τὸν ἰσολογισμὸν εὑρίσκουσι κέρδος 80000, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος κατὰ συμφωνίαν, ὡς διευθύνας τὴν εταιρίαν, πρέπει νὰ λάβῃ 5 τοῖς $^0/_0$, ἐκτὸς τοῦ ἀναλογοῦντος μέρους. Ζητεῖται νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἀνάλογον ἑκάστου.

Ἀνάλυσις.—Λαμβάνοντες κατὰ πρῶτον 5 $^0/_0$ ἐπὶ τοῦ κέρδους 80000, ἤτοι 4000, ἀφαιροῦμεν αὐτάς, καὶ οὕτως ἔχομεν ὑπόλοιπον 76000, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διανείμωμεν καὶ ἀναλόγως τῶν καταβολῶν καὶ ἀναλόγως τῶν χρόνων. Ἵνα συμβιβάσωμεν διὰ τοῦτο τὴν διπλῆν ταύτην σχέσιν, πολυπλασιάζομεν τὰς καταβολὰς ἐπὶ τοὺς χρόνους, καὶ διαιροῦμεν τὸ ποσὸν ἀναλόγως τῶν γινομένων.

Οὕτω πολυπλασιάζοντες τὴν καταβολὴν τοῦ πρώτου 25000 ἐπὶ τὸν χρόνον 2 ἔτη, ἢ 24 μῆνας, εὑρίσκομεν 600000· οὗτος δὲ εἶναι ὁ ἀνάλογος τοῦ μέρους τοῦ πρώτου.

Ὡσαύτως πολυπλασιάζοντες τὴν καταβολὴν τοῦ δευτέρου 40000 ἐπὶ τὸν χρόνον 24—5, ἤτοι 19 μῆνας, εὑρίσκομεν γινόμενον 760000 διὰ τὸν ἀνάλογον τοῦ δευτέρου μέρους.

Τέλος πολυπλασιάζοντες 60000 ἐπὶ 19—6, τουτέστι 13 μῆνας, λαμβάνομεν 780000 διὰ τὸν ἀνάλογον τοῦ τρίτου.

Ὅθεν διαιροῦντες τὸ κέρδος 76000 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 600000, 760000 καὶ 780000, ἢ μᾶλλον ἀναλόγως τῶν 60, 76 καὶ 78 εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{76000 \times 60}{214} = 21308,41$$

$$\chi' = \frac{76000 \times 76}{214} = 26990,65$$

$$\text{καὶ } \chi'' = \frac{76000 \times 78}{214} = 27700,94$$

Βάσανος	76000, 00
Προσθέτοντες δὲ καὶ	4000
εὑρίσκομεν τὸ μεριστέον ποσὸν	80000

305. Προτείνομεν χάριν ἀσκήσεως καὶ τὰ ἑξῆς ζητήματα.

Πρόβλημα Γ'. — Οἰκόπεδον ἠγοράσθη ὑπὸ τριῶν διὰ 3500 δραχ., οἱ ὁποῖοι ἔδωκαν ὁ μὲν 1500, ὁ δὲ 1200, ὁ δὲ 800 δραχμάς. Ἐπωλήθη δὲ διὰ δραχμὰς 6800· ζητεῖται τὸ ἀνάλογον ἑκάστῳ.

Ἀπόκρ. ὁ ά. 2914, 28, ὁ β'. 2331, 42, ὁ γ'. 1554, 30.

Πρόβλημα Δ'.—Ἔμπορος ἔχει ἐνεργητικὸν 24000 δραχμὰς, ὀφείλει δὲ εἰς τέσσαρας δανειστὰς, εἰς μὲν τὸν πρῶτον 5000, εἰς δὲ τὸν δεύτερον 7000, εἰς τὸν τρίτον 9580 καὶ εἰς τὸν τέταρτον 15020 δραχμάς· πτωχεύσας οὗτος κατ' ἀνάγκην προσκαλεῖ τοὺς δανειστὰς εἰς τὸ ἀνάλογον τοῦ περισωθέντος κεφαλαίου. Ζητεῖται πόσον ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον τῶν δανειστῶν.

Ἀπόκρ. εἰς τὸν ά. 3278, 70, εἰς τὸν β΄. 4590, 16, εἰς τὸν γ΄. 6281, 96 καὶ εἰς τὸν δ΄. 9849, 18.

Πρόβλημα Ε΄.—Νὰ διανείμωμεν τὴν κληρονομίαν 36000 δραχμῶν εἰς τέσσαρας ἀδελφούς. Ὥςε ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ τὸ διπλοῦν τοῦ πρώτου, ὁ τρίτος, ὅσον οἱ ἄλλοι δύο ὁμοῦ, καὶ ὁ τέταρτος τρὶς τὸ μερίδιον τοῦ τρίτου.

Ἀπόκρ. 2400, 4800, 7200, 21600.

Πρόβλημα Ϛ΄. — Τρεῖς τεχνῖται ἀνέλαβον ὡρισμένον τι ἔργον, διὰ τὸ ὁποῖον ἐπληρώθησαν δραχ. 31, 20. Ὁ πρῶτος εἰργάσθη 3 ἡμέρας, 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὁ δεύτερος 4 ἡμέρας ἀνὰ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, καὶ ὁ τρίτος 6 ἡμέρας ἀνὰ 7 ὥρας. Ζητεῖται νὰ διανείμωμεν τὸ κέρδος αὐτῶν ἀναλόγως τῆς ἐργασίας.

Ἀπόκρ. ὁ ά. 9, ὁ β΄. 9, 60 καὶ ὁ γ΄. 12, 60.

§. ί. Περὶ τῆς μεθόδου τῶν μέσων.

306. Ἡ μέθοδος αὕτη, ἀνεξάρτητος ὅλως ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν, ἐγκαταλέγεται ἐνταῦθα μεταξὺ τῶν ἄλλων μόνον διὰ τὴν τάξιν. Ἔχει δὲ σκοπὸν νὰ προσδιορίσῃ τὸν μέσον ὅρον τῆς ἐκτιμήσεως πολλῶν συμμιγνυομένων πραγμάτων διαφόρου ποσότητος καὶ ἀξίας.

Πρόβλημα Α΄. — Οἰνοπώλης ἀναμιγνύει οἴνους τριῶν εἰδῶν, τουτέστι 250 μνᾶς τῶν 34 λεπτῶν τὴν μνᾶν, 180 τῶν 42, καὶ 200 τῶν 45· Ζητεῖται ὁ μέσος ὅρος διὰ τὴν τιμὴν τοῦ μίγματος.

Λύσις.	250×34	δίδει λεπτὰ	8500.
	180×42	» »	7560.
	200×45	» »	9000.
	630		25060.

Πολυπλασιάσαντες τὸ ποσὸν ἑκάστου εἴδους ἐπὶ τὴν ἀναφορικὴν τιμὴν καὶ λαβόντες τὸ ἄθροισμα 25060 διὰ τὴν ὅλην ἀξίαν τῶν 630 μνῶν τοῦ μίγματος προσδιορίζομεν τὴν τιμὴν αὐτοῦ διαιροῦντες τὸ ὅλον ἀντίτιμον 25060 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ κράματος 630.

Ἡ ἀνάλυσις τοῦ παραδείγματος τούτου ἀρκεῖ πρὸς ὁδηγίαν καὶ τῆς τῶν ἄλλων ὁμοίως. Ὅθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

Ἵνα εὕρωμεν τὸν μέσον ὅρον εἰς τὴν μονάδα τοῦ μίγματος, πολυπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν μιγνυομένων ποσῶν ἐπὶ τὴν ἀναφορικὴν τιμὴν αὐτοῦ, προσθέτομεν τὰ γινόμενα ταῦτα, καὶ διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ συνόλου τῶν μιγνυομένων ποσοτήτων.

307. Ἰδοὺ καὶ ἕτερα παραδείγματα.

Πρόβλημα Β΄. — Συνεχωνεύθησαν 23 δραχμαὶ ἀργύρου πρὸς 0, 825 καθαρότητος, 14 δραχμαὶ πρὸς 0, 910 καὶ 19 πρὸς 0, 845. Ζητεῖται ἡ καθαρότης τοῦ μίγματος.

Ὑπὸ τὴν φράσιν 0, 825, ἢ 0, 910 κτλ. καθαρότητος ἀργύρου ἢ χρυσοῦ, ἐννοοῦμεν, ὅτι ἐκ τῶν 1000 χιλιοστημορίων τῆς μονάδος, οἷον δραχμῆς, οὐγγίας κτλ. τὰ μὲ 0,815 εἶναι ἄργυρος ἢ χρυσὸς, τὰ δὲ λοιπὰ εἰς συμπλήρωσιν τῶν 1000 εἶναι κοινὸν μέταλλον, οἷον χαλκὸς, κτλ. τοῦτο λέγεται ὑπὸ τῶν νεωτέρων τίτλος καθαρότητος ἢ ἁπλῶς τίτλος (titre).

Ἀνάλυσις	23	δραχ. πρὸς	0,825=18975	
	14	» »	0.910=12740	
	19	» »	0,845=16055	
ὅθεν	56	δραχμαὶ ἔχουσι	47,770	

Καὶ διαιροῦντες τὸν καθαρὸν ἄργυρον 47, 770 διὰ τοῦ ὅλου βάρους 56 εὑρίσκομεν διὰ τὴν μονάδα τοῦ μίγματος 0, 853 ὡς ἔγγιστα 0, 001.

Πρόβλημα Γ΄.—Ἀνεμίξαμεν τριῶν εἰδῶν οἰνοπνεύματα, καὶ ζητεῖται ὁ βαθμὸς τοῦ μίγματος.

Π. χ.	23	λίτρ. τῶν	22
	15	» »	25
	27	» »	18

Ἐκτελουμένων ὡσαύτως τῶν πολυπλασιασμῶν τῶν λιτρῶν ἐπὶ τοὺς βαθμοὺς, καὶ γινομένης τῆς προσθέσεως, εὑρίσκομεν 1367 βαθμοὺς διὰ τὰς 95 λίτρας, ὡς γινόμενον τῶν 65 λιτρῶν καὶ τοῦ ἀναφορικοῦ μέσου ὅρου τοῦ βαθμοῦ αὐτῶν καὶ διαιροῦντες εὑρίσκομεν μέσον ὅρον 21 ὡς ἔγγιςα.

308. Χάριν ἀσκήσεως φέρομεν καί τινα ἄλλα πρὸς λύσιν.

Πρόβλημα Δ΄. — Τὸ σελίνιον ἔχει βάρος δραχ. 5, 65, πρὸς 0,925 βαθμὸν καθαρότητος· τὸ φράγκον ἔχει βάρος δραχ. 5 πρὸς 0, 910 καὶ τὸ δίστηλον δραχ. 27, 045 πρὸς 0, 903. Ζητεῖται τὸ βάρος τῆς συγχωνεύσεως 44 σελινίων, 25 φράγκων καὶ 3 διστήλων καὶ ὁ ἀναφορικὸς μέσος ὅρος τῆς καθαροτητος.

Ἀπόκρ. δραχ. 454 $\frac{735}{1000}$ μέσος ὅρος 0, 917.

Πρόβλημα Ε΄. — Ἡ ἀγγλικὴ λίρα ἔχει βάρος δραχμὰς 7, 98 πρὸς 0, 917 βαθμὸν καθαρότητος, τὸ ὀλλανδικὸν ἔχει βάρος δραχ. 6,729 πρὸς 0, 900 καὶ τὸ εἰκοσάφραγκον ἔχει βάρος δραχ. 6, 45 πρὸς 0, 900. Ζητεῖται πόσον ἄργυρον πρέπει νὰ συγχωνεύσωμεν εἰς 5 λίρας, 7 ὀλλανδικὰ, καὶ 2 εἰκοσάφραγκα, ἵνα συμπληρώσωμεν τὸν ἀριθμὸν 100 δραχ. καὶ ποῖος θέλει εἶσθαι ὁ μέσος ὅρος τῆς καθαρότητος.

Ἀπόκρ. Προσθήκη ἀργύρου 0, 1 τῆς δραχμῆς μέσος ὅρος καθαρότητος τοῦ κράματος 0, 905.

Πρόβλημα ϛ΄.—Ἐμετρήθη τρὶς τὸ ὕψος τινὸς ὅρους καὶ εὑρέθη πρῶτον 250 πήχ. καὶ 439 χιλιος. τὸ δεύτερον 250 πήχ. καὶ 695 χιλιοσὰ καὶ τὸ τρίτον 249, 75. Ζητεῖται ὁ μέσος ὅρος τοῦ ὕψους.

Ἀπόκρ. 250 πήχεις καὶ 294 χιλιοστά.

§. ιά. Περὶ τῆς μεθόδου τῆς συμμίξεως.

309. Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἔχει σκοπὸν νὰ προσδιορίσῃ τὸν λόγον, καθ' ὃν

πρέπει νὰ συμμίξωμεν δύο ἢ καὶ περισσότερα πράγματα ὁμοειδῆ, ἀλλὰ διαφόρου ποιότητος καὶ ἀξίας· ὥστε ἡ μονὰς τοῦ μίγματος νὰ ἔχῃ ὡρισμένην τιμήν.

Π. χ. ἂν ὁ ῥωσσικὸς σῖτος τιμᾶται δραχ. 5 τὸ κοιλὸν, ὁ δὲ τῆς Βοιωτίας δραχ. 4, ὁ δὲ τῆς Ἀλεξανδρείας δραχ. 3, 75, κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου αὐτῶν, ἵνα σχηματίσωμεν σῖτον, τιμώμενον πρὸς δραχ. 4, 25.

Θεωροῦμεν κατὰ πρῶτον τὸ ζήτημα γενικὸν διὰ δύο συμμιγνυόμενα εἴδη, ἐφεξῆς δὲ διαλαμβάνομεν καὶ τὴν περίστασιν, καθ' ἣν τὰ εἴδη εἶναι περισσότερα. Προτείνομεν διὰ τοῦτο τὴν πρότασιν κατὰ τὴν ἑξῆς γενικὴν ἔκφρασιν.

Ἔχομεν δύο εἰδῶν πράγματα, καὶ τοῦ μὲν ἀνωτέρου εἴδους ἡ ἀξία εἶναι α εἰς τὴν μονάδα, τοῦ δὲ κατωτέρου εἶναι β, θέλομεν δὲ δι' ἀναλόγου ἑνώσεως αὐτῶν νὰ σχηματίσωμεν μίγμα τρίτης ποιότητος, τιμώμενον πρὸς γ, μικρότερον μὲν τοῦ α, μεγαλήτερον δὲ τοῦ β.

Παριστάνοντες τὰ ζητούμενα ποσὰ διὰ τῶν ἀγνώστων χ καὶ ψ συλλογιζόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδὴ ἡ μονὰς τοῦ πρώτου εἴδους τιμᾶται α· ἄρα αἱ χ μονάδες τιμῶνται αχ.

Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ μονὰς τοῦ δευτέρου τιμᾶται β, ἄρα αἱ ψ τιμῶνται βψ.

Ἐκ τούτου ἡ ἀξία τῶν χ καὶ ψ μονάδων τοῦ μίγματος εἶναι $\alpha\chi+\beta\psi$.

Ἐξ ἑτέρου μέρους, ἐπειδὴ ἡ μονὰς τοῦ μίγματος ὁρίζεται πρὸς γνωστὴν τιμὴν γ· ἄρα αἱ $\chi+\psi$ μονάδες τοῦ μίγματος φέρουσι $\gamma(\chi+\psi)$, ἤτοι $\gamma\chi+\gamma\psi$. Ἐξισοῦντες ἤδη, κατὰ τὴν συνθήκην τοῦ ζητήματος, τὰ δύο ἐξαγόμενα $\alpha\chi+\beta\psi$ καὶ $\gamma\chi+\gamma\psi$ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος λαμβάνομεν $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma\chi+\gamma\psi$· καὶ ἀφαιροῦντες ἑκατέρωθεν τὴν αὐτὴν ποσότητα $\gamma\chi+\beta\psi$· λαμβάνομεν $\alpha\chi+\beta\psi-\gamma\chi-\beta\psi=\gamma\chi+\gamma\psi-\gamma\chi-\beta\psi$· καὶ ἐπαλείφοντες τοὺς προσθαφαιρουμένους ἴσους ὅρους βψ καὶ γχ λαμβάνομεν $\alpha\chi-\gamma\chi=\gamma\psi-\beta\psi$.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ αὐτὴ ποσότης χ πολυπλασιάζει α καὶ γ, δύναται διὰ τοῦτο τὸ πρῶτον μέλος νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\alpha-\gamma)\chi$. Ὁμοίως ἡ ποσότης ψ πολυπλασιάζουσα γ καὶ β τίθεται ἔξω παρενθέσεως, ὡς παράγων τῆς διαφορᾶς $\gamma-\beta$. Ὅθεν ἡ ἀνωτέρω ἰσότης τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\alpha-\gamma)\chi=(\gamma-\beta)\psi$· ἐξ ἧς ἕπεται ἡ ἀναλογία τῶν παραγόντων

$$\alpha-\gamma : \gamma-\beta :: \psi : \chi.$$

Ἐκ ταύτης ἐξηγεῖται ἤδη ὁ λόγος, καθ' ὃν πρέπει νὰ ἑνωθῶσι τὰ εἴδη χ καὶ ψ, ἵνα προκύψῃ τρίτον εἶδος τῆς ἀξίας γ. Διότι ὁ μὲν ὁμόλογος τοῦ ψ εἶναι ὁ $\alpha-\gamma$, ὁ δὲ τοῦ χ ὁ $\gamma-\beta$. Ἐπομένως, ἵνα σχηματίσωμεν μίγμα ὡρισμένης ἀξίας ἐκ δύο πραγμάτων διαφόρου τιμῆς, λαμβάνομεν ἐκ μὲν τοῦ κατωτέρου εἴδους, ὅσον εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ μέσου ὅρου καὶ τῆς ἀνωτέρας τιμῆς, ἐκ δὲ τοῦ ἀνωτέρου, ὅση εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ μέσου ὅρου καὶ τῆς κατωτέρας τιμῆς.

310. Ἐφαρμόζομεν τὴν γενικὴν ταύτην πρότασιν εἰς μερικὰ παραδείγματα.

Πρόβλημα Α΄.—Ἔχομεν σίτους δύο εἰδῶν, τὸν μὲν τιμώμενον πρὸς λ. 615, τὸν δὲ πρὸς λ. 572. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου, ἵνα σχηματίσωμεν σῖτον τρίτου εἴδους τιμώμενον πρὸς δραχ. 6, ἤτοι λ. 600.

Λύσις.—Κατὰ τὸν ἀνωτέρω λόγον ἀφαιροῦντες τὴν κατωτέρω τιμὴν 572 ἀπὸ τοῦ μέσου ὅρου 600 εὑρίσκομεν 28 διὰ τὸν ὁμόλογον τοῦ ἀνωτέρου εἴδους χ.

Ὁμοίως ἀφαιροῦντες τὸν μέσον ὅρον 600 ἀπὸ τῆς ἀνωτέρας τιμῆς 615 εὑρίσκομεν 15 διὰ τὸν ὁμόλογον τοῦ κατωτέρου εἴδους ψ.

Οὕτως 28 κοιλὰ τῶν 615 λεπτῶν καὶ 15 τῶν 572 συγκροτοῦσι 43 κοιλὰ τοῦ μέσου ὅρου 600 ὡς δυνάμεθα νὰ πληροφορηθῶμεν διὰ τῆς μεθόδου τῶν μέσων κατὰ τὸν ἑξῆς ὑπολογισμόν.

	28 κοιλὰ πρὸς λ. 615	φέρουσι δραχ.	172,20
	15 » » » 872	» » »	85,80
ὅθεν	43 κοιλὰ τιμῶνται	. . . δραχ.	258

Καὶ ἓν κοιλὸν $= \frac{258}{43} =$ δραχ. 6.

Χάριν εὐκολίας διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν ἑξῆς πίνακα.

	28	28×615=172,20	
	615	12×572= 85,80	
600	———	———	———
	572	43	258,00 | 43
	15		6

Φέρομεν γραμμήν, ἄνω τῆς ὁποίας γράφομεν τὴν ἀνωτέραν τιμὴν καὶ κάτωθι αὐτῆς τὴν κατωτέραν· πρὸς τὰ ἀριστερὰ δὲ γράφομεν τὴν ὁριζομένην μέσην. Οὕτως ἀφαιροῦντες κατὰ τὸν κανόνα σημειοῦμεν τὰ ὑπόλοιπα, τὸ μὲν ἄνωθι τοῦ μείζονος ὅρου, τὸ δὲ κάτωθι τοῦ ἐλάσσονος· καὶ προχωροῦμεν εἰς τὸν λοιπὸν ὑπολογισμὸν πρὸς τὰ δεξιά, κατὰ τὴν μέθοδον τῶν μέσων, ἡ ὁποία χρησιμεύει ὡς βάσανος εἰς τὴν μέθοδον τῆς συμμίξεως.

311. Λαμβάνοντες ἤδη τὸ ζήτημα ὑπὸ ἐκτενεστέραν ἔποψιν ὑποθέτομεν περισσότερα τὰ ἀναμιγνυόμενα εἴδη, ὡς εἰς τὸ φερόμενον παράδειγμα.

Πρόβλημα Β΄.—Ἔχομεν ἄργυρον ἓξ εἰδῶν πρὸς βαθμὸν καθαρότητος, 0,920· 0,910· 0,905· 0,883· 0,880· 0,850· καὶ ζητοῦμεν ἐξ ὅλων αὐτῶν νὰ συγκροτήσωμεν κράμα τῶν 0,900 καθαρότητος.

	Πρᾶξις.			Βάσανος.
	17	20	50	17×920=15640
	920,	910,	905	20×910=18200
900	———	———	———	50×905=45250
	883,	880,	850	20×893=17660
	20	10	5	10×880= 8800
				5×850= 4250
				122 109800 | 122
				: : : 900

Ἀνάλυσις.—Ἐπειδὴ ὁ λόγος δὲν μεταβάλλεται, ἂν πολυπλασιασθῶσιν οἱ ὅροι ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, διὰ τοῦτο ἐπαλείφοντες τὴν ὑποδιαστολὴν τῶν δεκαδικῶν, θεωροῦμεν αὐτοὺς ὡς ἀκεραίους.

Μεταβαίνοντες δὲ ἐφεξῆς εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς πράξεως λέγομεν, ἡ πρώτη συζυγία τῶν 920 καὶ 883 προσδιορίζει 17 μονάδας ἀργύρου τῶν 920 καὶ 20 τοῦ τῶν 883, ἐξ ὧν συμβιβάζεται κράμα 37 μονάδων τοῦ μέσου ὅρου 900. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν δευτέραν συζυγίαν τῶν δύο εἰδῶν 910 καὶ 880, ἐξ ἧς προσδιορίζονται 20 ἐκ τοῦ πρώτου καὶ 10 ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους, τουτέστι 30 τοῦ μέσου ὅρου 900. Καὶ ὡσαύτως διὰ τὴν τρίτην, ἐξ ἧς προσδιορίζονται 50 ἐκ τοῦ εἴδους τῶν 905 καὶ 5 ἐκ τῶν 850, καὶ ἐπομένως 58 τοῦ μέσου ὅρου 900· ἕπεται λοιπὸν ἐκ τούτου, ὅτι ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις θεωρεῖται ὡς ἑνόνουσα τὰ τρία μερικὰ κράματα τῶν 37 μονάδων τῆς πρώτης, τῶν 30 τῆς δευτέρας καὶ τῶν 55 τῆς τρίτης συζυγίας, καὶ διὰ τοῦτο τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν πρέπει νὰ ἦναι ὅρος καθαρότητος ὁ προτεινόμενος μέσος 900.

312. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως, ὁμοίας καὶ διὰ πᾶν ἄλλο παράδειγμα, συμπεραίνομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα τῆς μεθόδου.

Ἵνα ἀναμίξωμεν ποσὰ διαφόρου ἀξίας, ὥστε ἡ μονὰς τοῦ μίγματος νὰ ἔχῃ ὡρισμένην τιμὴν, φέρομεν ὁριζόντιον γραμμὴν, ἄνω τῆς ὁποίας γράφομεν διαδοχικῶς ὅλας τὰς ἀξίας τὰς ἀνωτέρας τοῦ ὁριζομένου μέσου ὅρου, κάτω δὲ αὐτῆς ὅλας τὰς κατωτέρας, καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τὸν μέσον ὅρον.

Ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς ἀπὸ τοῦ μέσου ὅρου μίαν ἑκάστην τιμὴν κατωτέραν, καὶ τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα γράφομεν ἐπὶ κεφαλῆς τῶν ἀνωτέρων τιμῶν.

Ἀφαιροῦμεν τὸν μέσον ὅρον ἀπὸ μιᾶς ἑκάστης τῶν ἀνωτέρων καὶ τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα γράφομεν κάτωθι τῶν κατωτέρων τιμῶν.

Τὰ οὕτω λαμβανόμενα ὑπόλοιπα ἐκφράζουσι τὸν λόγον τῆς συμμίξεως ὡς πληροφορούμεθα διὰ τῆς μεθόδου τῶν μέσων.

313. Ὅταν αἱ ἀνώτεραι ἀξίαι ἦναι περισσότεραι ἢ ὀλιγώτεραι, καὶ ἐπομένως δὲν συνδυάζωνται εἰς συζυγίας, δυνάμεθα νὰ ἐννοήσωμεν μίαν ἐκ τῶν ὀλιγωτέρων, ἐπαναλαμβανομένην καὶ αὖθις καὶ πολλάκις, καὶ οὕτω νὰ συγκροτήσωμεν τὰς συζυγίας ταύτας, ὡς εἰς τὸ ἑπόμενον παράδειγμα.

Πρόβλημα Γ΄.—Ἔχομεν πέντε εἰδῶν οἰνοπνεύματα τῶν 26^0, 24^0, 18^0, 16^0, καὶ 15^0 βαθμῶν καὶ ζητοῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν ἐξ αὐτῶν σύγκραμα τῶν 20^0.

Πρᾶξις.

	2	4+5=9	
	26,	24	
20			
	18	16	15
	6	4	4

Βάσανος.

$$\begin{array}{r} 2\times26=\ 52 \\ 9\times24=216 \\ 6\times18=108 \\ 4\times16=64 \\ 4\times15=60 \\ \hline \end{array}$$

25 500 | 25

: : : 20

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο, ἐπειδὴ τὰ οἰνοπνεύματα τῶν μὲν ἀνωτέρων βαθμῶν εἶναι δύο, τὰ δὲ τῶν κατωτέρων εἶναι τρία, ἐπαναλαμβάνομεν καὶ αὖθις ἓν τῶν ἀνωτέρων, ὡς τὸ τῶν 24, καὶ οὕτω συνδυάζομεν καὶ τὸ τρίτον κατώτερον εἶδος τῶν 15 βαθμῶν.

314. Ἡ λύσις τῶν ζητημάτων τούτων δὲν εἶναι ὡρισμένη καὶ μάλιςα, ὁσάκις πρόκειται νὰ ἀναμίξωμεν ποσότητας ἀνίσου ἀξίας· ἀλλὰ σκοπὸς τῆς μεθόδου, ὡς εἴπομεν, εἶναι νὰ προσδιορίσῃ τὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουσιν αἱ μιγνύμεναι ποσότητες. Κατ᾽ αὐτὸν δὲ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ ποσὰ μεγαλήτερα ἢ μικρότερα, μεταχειριζόμενοι τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, ἢ τὴν μέθοδον τῆς ἑταιρίας, ὡς θέλομεν φέρει τοιαῦτα παραδείγματα. Σημειοῦμεν πρὸς τούτοις, ὅτι ὅταν τὰ μιγνύμενα εἴδη ἦναι πολλά, τότε δύναται καὶ αὐτὸς ὁ λόγος νὰ μεταβληθῇ κατὰ τὴν διάφορον γραφήν, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ διατηρήσωμεν εἰς τοὺς ἄνωθι τῆς γραμμῆς ἀνωτέρους ὅρους καὶ εἰς τοὺς κατωτέρους, τοὺς κάτωθι τῆς ἰδίας, ἔτι δὲ καὶ κατὰ τὴν ἐκλογὴν τοῦ ὅρου, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν εἰς συμπλήρωσιν τῶν συζυγιῶν, ὅταν ἦναι περισσότεροι οἱ ὅροι, οἱ ἄνω ἢ οἱ κάτω τῆς γραμμῆς. Ἐν γένει τὸ ζήτημα τῆς συγκράσεως, ὅλως ἀλγεβρικὸν εἶναι φύσει ἀπροσδιόριστον· δύναται δὲ νὰ τροποποιηθῇ εἰς ὁριστικωτέραν λύσιν μόνον, ὅταν ὑπάρχωσι καὶ ἄλλαι συνθῆκαι.

315. Ἰδοὺ προβλήματα ἔχοντα περισσοτέρας συνθήκας.

Πρόβλημα Δ΄. — Ἐκ τῆς συγχωνεύσεως ἀργύρου δύο εἰδῶν, τοῦ μὲν πρὸς $\frac{7}{8}$, τοῦ δὲ πρὸς $\frac{31}{32}$ καθαρότητος, ζητεῖται νὰ κατασκευάσωμεν ἄργυρον 100 δραχμῶν πρὸς βαθμὸν καθαρότητος $\frac{15}{16}$.

Λύσις. — Ἀνάγοντες κατὰ πρῶτον τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ ἐπαλείφοντες τοὺς παρονομαστάς, ἐπιλύομεν τὸ πρόβλημα, ὡς πρὸς τοὺς ἀριθμητάς, 28, 31 καὶ 30.

Πράξις.

$$\begin{array}{ll} & 2 \\ & 31 \\ 30 & \overline{} \\ & 28 \\ & 1 \end{array}$$

Βάσανος.

$$\begin{array}{rr} 2\times31=62 & \\ 1\times28=28 & \\ \overline{3} \quad \overline{90} & \underline{|\ 3} \\ :\ : & 30 \end{array}$$

Εὑρόντες οὕτω τὸν λόγον 2 πρὸς 1 διὰ τὰς τρεῖς δραχμάς, προσδιορίζομεν τὸ ἀνάλογον ἐξ ἑκατέρου διὰ τὰς 100, κατὰ τὴν μέθοδον τῆς ἑταιρίας· διότι ἔχομεν $2 : \chi : : 1 \chi'$.

Ἐξ ἧς προκύπτει $3 : 100 : : 2 : \chi = 66,66$

καὶ $3 : 100 : : 1 : \chi = 33,34$

$\overline{100 \ldots}$

τουτέστιν ἐκ μὲν τοῦ καθαρωτέρου ἀργύρου πρέπει νὰ λάβωμεν δρ. 66,66, ἐκ δὲ τοῦ κατωτέρου 33, 34· αὕτη δὲ εἶναι ἡ μόνη ὁριστικὴ λύσις.

Πρόβλημα Ε΄. — Ἔχομεν χρυσὸν καθαρόν, χαρακτηριζόμενον διὰ τῶν 1000 βαθμῶν, καὶ ἕτερον τῶν 950 καὶ ζητοῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν χρυσὸν τρίτου εἴδους τῶν 800. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ προσθέσωμεν χαλκὸν εἰς ποσότητα, τῆς ὁποίας 25 δραχμαὶ νὰ ἦναι χρυσὸς τοῦ δευτέρου χρυσοῦ τῶν 950.

Λύσις. — Ἐπειδὴ μόνον ὁ χαλκὸς εἶναι ὁ ὅρος τοῦ κατωτέρου εἴδους, διὰ τοῦτο γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν τὸ 0, τὸ ὁποῖον ἐμφαίνει τὸν βαθμὸν αὐτοῦ, καὶ προχωροῦμεν εἰς τὴν πρᾶξιν.

	Πρᾶξις.		Βάσανος.	
	800	800	$800 \times 1000 = 800000$	
	1000,	950	$800 \times 950 = 760000$	
800			$350 \times 0 = \ldots\ldots$	
	0	0	1950	1560000 | 1950
	200	150		 800

Εὑρόντες οὕτω τὸν λόγον τοῦ δευτέρου χρυσοῦ πρὸς τὸν τοῦ μίγματος, τουτέστιν 800 πρὸς 1950· προσδιορίζομεν τὸ ἀνάλογον βάρος τοῦ μίγματος, εἰς τὸ ὁποῖον χρυσὸς τῶν 950 ἐμπεριέχεται μόνον δραχμὰς 25. Διότι ὑποστρώνομεν τὴν ἀναλογίαν

$$800 : 25 :: 1950 : \chi = 60,9375.$$

Ἵνα εὕρωμεν ἤδη καὶ τὸ βάρος τοῦ ἐμπεριληφθησομένου καθαροῦ χρυσοῦ εἰς τὸ βάρος 60, 9375 τοῦ μίγματος· ὑποστρώνομεν τὴν ἀναλογίαν τῶν μιγμάτων πρὸς τοὺς καθαροὺς χρυσούς.

$1950 : 60,9375 :: 800 : \chi$· ἐξ ἧς προκύπτει $\chi = 25$.

Τέλος εὑρίσκομεν καὶ τὸ ἀνάλογον βάρος τοῦ χαλκοῦ, ὑποστρώνοντες ὡσαύτως τὴν ἀναλογίαν· ἀλλ᾽ εἶναι προτιμότερον νὰ λάβωμεν τὴν διαφορὰν τοῦ ἀθροίσματος 50 τῶν δύο εἰδῶν τοῦ χρυσοῦ ἀπὸ τοῦ ὅλου βάρους τοῦ μίγματος, 60, 9375 καὶ οὕτως ἔχομεν δραχμὰς 10, 9375.

Βάσανος.

$$\begin{array}{l}
25 \times 1000 = 25000 \\
25 \times 950 = 23750 \\
10,9375 \times 0 = \ldots\ldots \\
\hline
60,9375 \qquad 48750 \mid 60,9375 \\
\qquad\qquad \ldots\ldots \quad 800
\end{array}$$

§. ιϛ´. Περὶ τῆς συνεζευγμένης μεθόδου.

316. Ἡ μέθοδος αὕτη, ἥτις λέγεται καὶ ἅλυσος, εἶναι ἐν χρήσει ἀντὶ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, καὶ μάλιστα ὅταν ἡ λύσις τοῦ ζητήματος, ἀπαιτοῦσα τὸν προσδιορισμὸν συνθέτου τινὸς λόγου, ἐξαρτᾶται ἐκ πολλῶν τοιούτων ἀναλογικῶν σχέσεων. Ἐπειδὴ δὲ ὅλα τὰ ζητήματα τῆς τροπῆς ἑνός τινος ἀριθμοῦ νομισμάτων ἢ μέτρων πρὸς ἰσοδύναμον ἀριθμὸν ἑτέρων νομισμάτων ἢ μέτρων ἐμπεριέχουσι πάντοτε τοιαύτας ἀναλογικὰς σχέσεις διὰ τοῦτο ἡ μέθοδος αὕτη εὑρίσκει πλήρη τὴν ἐφαρμογὴν εἰς τὰ ζητήματα ταῦτα καὶ τὰ ὅμοια. Ἐξηγούμεθα σαφέστερον διὰ παραδειγμάτων.

Ζήτημα Α΄. — Γνωρίζοντες τὸν λόγον τῆς ἀγγλικῆς λίρας πρὸς τὸ δίστηλον, τὸν τοῦ διστήλου πρὸς τὸ φράγκον καὶ τὸν τοῦ φράγκου πρὸς τὸ φιορίνιον, νὰ εὕρωμεν τὸν ἀνάλογον ἀριθμὸν φιορινίων πρὸς δεδομένον ἀριθμὸν λιρῶν.

Ἔστω π. χ. 13 λίραι ἰσοδύναμοι μὲ 60 δίστηλα.
10 δίστηλα » » μὲ 54 φράγκα.
260 φράγκα » » μὲ 100 φιορίνια.

Ζητεῖται μὲ πόσα φιορίνια ἰσοτιμῶνται αἱ 2535 λίραι;

Διὰ μὲν τῆς μεθόδου τῶν τριῶν τὸ ζήτημα τοῦτο ἐπιλύεται διὰ τῶν ἑξῆς ἀναλογικῶν σχέσεων, 13 λίραι πρὸς 60 δίστηλα, οὕτω 2535 λίραι πρὸς ἀνάλογον ἀριθμὸν χ΄ διστήλων.

Ὁμοίως 10 δίστηλα πρὸς 54 φράγκα, οὕτω τὰ παρευρεθέντα χ δίστηλα πρὸς ἀνάλογον ἀριθμὸν χ΄ φράγκων.

Καὶ τέλος 260 φράγκα πρὸς 100 φιορίνια, οὕτω τὰ προευρεθέντα χ΄ φράγκα πρὸς τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν φιορινίων· τουτέστιν

$$13 : 60 :: 2535 : \chi,$$
$$10 : 54 :: \chi : \chi'.$$
$$260 : 100 :: \chi' : X.$$

ἐξ ὧν ἕπεται $X = \dfrac{60 \times 54 \times 100 \times 2535}{13 \times 10 \times 260} = 24300$ φιορίνια.

Ἀλλ᾿ ἰδοὺ προχειρότερον μέσον ἐπιλύσεως. Ὑποθέτομεν ὅτι ὅλα τὰ μνημονευόμενα νομίσματα, ἡ λίρα, τὸ δίστηλον, τὸ φράγκον καὶ τὸ φιορίνιον ἐκτιμῶνται πρὸς κοινήν τινα μονάδα, φέρ᾿ εἰπεῖν τὴν δραχμὴν καὶ τὰς διαιρέσεις αὐτῆς. Ἔστωσαν δὲ α τὰ ἀναλογοῦντα μέρη τῆς δραχμῆς εἰς τὴν λίραν, ϐ τὰ ἀναλογοῦντα εἰς τὸ δίστηλον, γ τὰ εἰς τὸ φράγκον καὶ δ τὰ εἰς τὸ φιορίνιον. Ἐκ τούτου οἱ ἀριθμοὶ τῶν διαφόρων νομισμάτων, τρεπόμενοι εἰς τὸ κοινὸν τοῦτο μέτρον δίδουσι τὰς ἰσότητας.

$$13.\ \alpha = 60.\ \beta.$$
$$10.\ \beta = 54.\ \gamma.$$
$$260.\ \gamma = 100.\ \delta.$$
$$\chi.\ \delta = 2535.\ \alpha.$$

(διὰ τοῦ χ παριστάνομεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν τῶν φιορινίων).

Πολυπλασιάζοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας μέλος πρὸς μέλος καὶ ἐπαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας α, ϐ, γ, δ, συνάγομεν τὴν ἰσότητα $13 \times 10 \times 260 \times \chi = 60 \times 54 \times 100 \times 2535$.

Ἐξ ἧς προκύπτει $\chi = \dfrac{60 \times 54 \times 100 \times 2535}{13 \times 10 \times 260} = 24300$ φιορίνια ὡς καὶ διὰ τῆς προλαβούσης πολλαπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Ἐκ τῆς ἀναλύσεως ταύτης συμπεραίνομεν, ὅτι διὰ πᾶν τοιοῦτο ζήτημα ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ γνωσοῦ λόγου τοῦ νομίσματος ἢ τοῦ μέτρου, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει ὁ τρεπτέος ἀριθμὸς, πρέπει νὰ διατάξωμεν ἐξ ἑνὸς καὶ ἑτέρου μέρους καθέτου γραμμῆς τοὺς ἀναλογοῦντας ἀριθμοὺς νομίσματος πρὸς νόμισμα, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τῶν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τῶν πρὸς ἀριστεράν. Πρὸς εὐκολίαν δὲ τῶν ὑπολογισμῶν ἐξαλείφομεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας, ὡς ἕπεται.

1 . . 13	60 . . . 6 . . . 3
10	54
1 . . . 13 . . . 260	100 . . . 10
χ.	2535 . . . 195 . . . 15.

Ὅθεν $\chi = 3 \times 54 \times 10 \times 15 = 24300$.

317. Φέρομεν δεύτερον παράδειγμα, εἰς τὸ ὁποῖον οἱ λόγοι τῶν ἑτεροειδῶν νομισμάτων ἐκφράζονται διὰ κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Ζήτημα Β΄. 20 ρούβλια $= 14 \frac{5}{6}$ δίστηλα
$12 \frac{1}{2}$ δίστηλα $= 13$ τάλ. Γερμανίας
24 τάλ. Γερμ. $= 5$ λίραι ἀγγλικαὶ
1 λίρ. ἀγγλικ. $= 28{,}12$ δραχμαὶ
χ δραχ $= 750$ ρούβλια.

Ἐνταῦθα πρὸς ἐπάλειψιν τῶν παρονομαστῶν τρέπομεν κατὰ πρῶτον τὰ ἀκέραια καὶ κλάσματα εἰς ἰσοδυνάμους κλασματικοὺς καὶ μετὰ ταῦτα ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλασματικοῦ πολυπλασιάζομεν ἑκάτερον μέλος τῆς ἰσότητος, καὶ οὕτως ἐξαλείφεται ὁ παρονομαστὴς ἀπὸ τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο μέλος, μεταβαίνων εἰς τὸ ἕτερον ὡς παράγων.

Οὕτως ἔχομεν 6×20 ρούβλια $= 89$ δίστηλα
15 δίστηλα $= 13 \times 2$ τάλ. γερμαν.
24 τάλ. γερμ. $= 5$ λίραι
100 λίρας $= 2812$ δραχμαὶ
χ. δραχ. $= 150$ ρούβλια

Ὅθεν συγκροτοῦμεν τὰς ἰσότητας τοῦ ζητήματος.

1 . . . 4 . . . 120	89
1 . . . 25	26 . . . 13
24	5 . . . 1
10 . . . 20 . . . 100	2812 . . . 703
χ	750 . . . 30 . . . 1

Καὶ ἑπομένως $\chi = \dfrac{89 \times 13 \times 703}{240} = 3389,\ 04$.

318. Λαμβάνομεν ἤδη ζήτημα ἐκ τῶν συνήθων εἰς τὸ ἐμπόριον, περιέχον συνεχῆ πολυπλασιασμὸν νομισμάτων καὶ μέτρων, ἢ ζυγίων.

Ζήτημα Γ΄. — Ἠγοράσαμεν εἰς Ναύπλιον Κορινθιακὴν σταφίδα πρὸς δραχμὰς 190 τὰς χιλίας λίτρας καὶ ἐστείλαμεν αὐτὴν εἰς Τεργέστην πληρώσαντες ἔξοδα εἰς μὲν τὴν Ἑλλάδα διὰ δασμὸν καὶ ναῦλον 23 $^0/_0$ εἰς δὲ τὸν παραγγελιοδόχον 2 $^0/_0$. Ζητεῖται πόσα φιορίνια τιμᾶται εἰς Τεργέστην ὁ στατὴρ, ἤτοι 100 φούντια. Γνωρίζομεν δὲ πρῶτον ὅτι 1000 λίραι ἐνετικαὶ ἰσοζυγίζουσι μὲ 375 ὀκάδας, αἱ δὲ 44 ὀκάδες μὲ ἕνα στα-